では、fibration と cofibration の間にはどういう関係があるのだろうか。
ところで、もう一度 fibration と cofibration の定義を思い出してみると、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "{}^{\exists}H"] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dd] \arrow[dl, "H"'] \\
& Y & \\
X \arrow[rr] \arrow[ur, "f"] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "{}^{\exists}\widetilde{H}"']
\end{tikzcd}$$

といった具合に図式で見ると、あまり共通点がない。というのも、今までの fibration と cofibration の話なら、矢印を逆にしたり、空間を入れ替えたりすれば成り立つような双対性があったからだ。しかし、次のように考えれば、この溝が埋まりそうである。

Remmark 0.0.1

$p\ :\ E \longrightarrow B$ が fibration であるのと、次は同値。

$$\begin{tikzcd}
B & & \mathrm{Map}(I, B) \arrow[ll] \\
& Y \arrow[ur, "H"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, dotted, "{}^{\exists}\widetilde{H}"] & \\
E \arrow[uu, "p"] & & \mathrm{Map}(I, E) \arrow[ll] \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Theorem 0.0.2

対空間 (X, A) に対し、

$$i\ :\ A \longrightarrow X \quad \text{cofibration}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{任意の位相空間 } Y \text{ に対し、} i^*\ :\ \mathrm{Map}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Map}(A, Y) \quad \text{fibration}$$

proof)　　$(\Longrightarrow)$　位相空間 Z に対し、

$$h \ : \ Z \longrightarrow \mathrm{Map}(X,Y) \quad , \quad H \ : \ Z \times I \longrightarrow \mathrm{Map}(A,Y)$$

が次の図式を可換にするとする。

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathrm{Map}(X,Y) \arrow[d, "i^*"] \\
Z \times I \arrow[r, "H"'] & \mathrm{Map}(A,Y)
\end{tikzcd}$$

ここで、

$$\mathrm{ad}^{-1}(h) \ : \ Z \times X \longrightarrow Y \quad , \quad ad^{-1}(H) \ : \ Z \times A \times I \longrightarrow Y$$

であり、

$$\mathrm{ad}^{-1}(H)(z,a,0) = H(z,0)(a) = h(z)(a) = ad^{-1}(z,a)$$

であるので、次の図式は可換となる。

$$\begin{tikzcd}
Z \times A \arrow[rr] \arrow[dd, "1_Z \times i"'] & & Z \times A \times I \arrow[dl, "\mathrm{ad}^{-1}(H)"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
Z \times X \arrow[ur, "\mathrm{ad}^{-1}(h)"] \arrow[rr] & & Z \times X \times I
\end{tikzcd}$$

ここで、

$$1_Z \times i \ : \ Z \times A \longrightarrow Z \times X$$

は、i : cofibration より、cofibratin となるため、

$$^{\exists}\widetilde{H} \ : \ Z \times X \times I \longrightarrow Y$$

で、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
Z \times A \arrow[rr] \arrow[dd, "1_Z \times i"'] & & Z \times A \times I \arrow[dl, "\mathrm{ad}^{-1}(H)"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
Z \times X \arrow[ur, "\mathrm{ad}^{-1}(h)"] \arrow[rr] & & Z \times X \times I \arrow[ul, "\widetilde{H}"']
\end{tikzcd}$$

これより、

$$\mathrm{ad}(\widetilde{H})\ :\ Z \times I \longrightarrow \mathrm{Map}(X, Y)$$

また、

$$\mathrm{ad}(\widetilde{H})(z, 0)(x) = \widetilde{H}(z, x, 0) = ad(h)(z, x) = h(z)(x)$$

であり、$a \in A$ に対し、

$$\mathrm{ad}(\widetilde{H})(z, t)(a) = \widetilde{H}(z, a, t) = ad(H)(z, a, t) = H(z, t)(a)$$

であるので、

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathrm{Map}(X, Y) \arrow[d, "i^*"] \\
Z \times I \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & \mathrm{Map}(A, Y)
\end{tikzcd}$$

$(\Longleftarrow)$　次に位相空間 W に対し、

$$g\ :\ X \longrightarrow W\quad ,\quad G\ :\ A \times I \longrightarrow W$$

が次の図式を可換にするとする。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd] \\
& W & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr] & & X \times I
\end{tikzcd}$$

ここで、

$$g^*\ :\ \mathrm{Map}(W, W) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, W)\quad ,\quad G^*\ :\ \mathrm{Map}(W, W) \longrightarrow \mathrm{Map}(A \times I, W)$$

であり、 $\mathrm{Map}(A \times I, W) \cong \mathrm{Map}(I, \mathrm{Map}(A, W))$ であったので、これを同一視して、

$$G^*\ :\ \mathrm{Map}(W, W) \longrightarrow \mathrm{Map}(I, \mathrm{Map}(A, W))$$

と見なせる。

$$\mathrm{ad}^{-1}(G^*)\ :\ \mathrm{Map}(W, W) \times I \longrightarrow \mathrm{Map}(A, W)$$

であり、

$$\mathrm{ad}^{-1}(G^*)(f,0)(a) = G^*(f)(a,0) = f \circ G(a,0) = f \circ g \circ i(a) = i^* \circ g^*(f)(a)$$

であるので、次の図式は可換となる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(W,W) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathrm{Map}(X,W) \arrow[d, "i^*"] \\
\mathrm{Map}(W,W) \times I \arrow[r, "\mathrm{ad}^{-1}(G^*)"'] & \mathrm{Map}(A,W)
\end{tikzcd}$$

ここで、i^* : fibration であるから、

$$^{\exists}\widetilde{G} \ : \ \mathrm{Map}(W,W) \times I \longrightarrow \mathrm{Map}(X,W)$$

で、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(W,W) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathrm{Map}(X,W) \arrow[d, "i^*"] \\
\mathrm{Map}(W,W) \times I \arrow[r, "\mathrm{ad}^{-1}(G^*)"'] \arrow[ur, "\widetilde{G}"] & \mathrm{Map}(A,W)
\end{tikzcd}$$

これより、

$$\mathrm{ad}(\widetilde{G}) \ : \ \mathrm{Map}(W,W) \longrightarrow \mathrm{Map}(I, \mathrm{Map}(X,W))$$

また、

$$\mathrm{Map}(I, \mathrm{Map}(X,Y)) \cong \mathrm{Map}(X \times I, W)$$

であることを考えれば、

$$\mathrm{ad}(\widetilde{G}) \ : \ \mathrm{Map}(W,W) \longrightarrow \mathrm{Map}(X \times I, W)$$

とみなせる。よって、

$$\mathrm{ad}(\widetilde{G})(1_W) \ : \ X \times I \longrightarrow W$$

を考えたとき、

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(\widetilde{G})(1_W)(x,0) &= \widetilde{G}(1_Y,0)(x) \\
&= g^*(1_Y)(x) \\
&= 1_Y \circ g(x) = g(x)
\end{aligned}$$

さらに、$a \in A$ に対し、

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(\widetilde{G})(1_W)(a,t) &= \widetilde{G}(1_Y,t)(a) \\ &= \mathrm{ad}^{-1}(G^*)(1_Y,t)(a) \\ &= 1_Y \circ G(a,t) = G(a,t) \end{aligned}$$

これより、$\mathrm{ad}(\widetilde{G})(1_W) = F$ とおけば、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd] \\ & W & \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr] & & X \times I \arrow[ul, "F"'] \end{tikzcd}$$

が可換となる。 $\square$