ファイブレーション

ファイバー束で最も重要な性質として、被覆ホモトピー性質というものがあった。この性質を抜き出したものがファイブレーションである。

1　ファイブレーション

定義 1.1. 写像 $p : E \longrightarrow B$ が位相空間 X に対し、被覆ホモトピー性質をもつとは、任意の $f : X \longrightarrow E$, $H : X \times I \longrightarrow B$ で

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

を可換にするものに対し、$\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow E$ が存在し、上記の図式を可換にする。任意の空間に対し被覆ホモトピー性質を持つ写像を Hurewicz ファイブレーション、任意の CW 複体に対し、被覆ホモトピー性質を持つ写像を Serre ファイブレーションとよぶ。

注意 1.2. Hurewicz ファイブレーションは Serre ファイブレーションである。また、ファイバー束は Serre ファイブレーションである。

ここでは一般的に Hurewicz ファイブレーションについて成り立つ性質について扱う。

例 1.3. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$, $B = I$ とする。$p : E \longrightarrow B$ を第一成分への射影とすると、これはファイブレーションであるがファイバー束でない。

証明 まずファイブレーションであることを示すため、次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

このとき、$\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow E$ を、$\widetilde{H}(x, t) = (H(x, t), \min\{H(x, t), p_2 \circ f(x)\})$ で定義すると、これがホモトピーの持ち上げである。よってファイブレーションである。一方、B が弧状連結であるので、ファイバー束であればファイバーはすべて同相であるが、$p^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$, $p^{-1}(1) = \{1\} \times I$ であるので、ファイバー束ではない。 □

被覆空間やファイバー束でもそうであったように、ファイブレーションも引き戻しで保たれる性質がある。

命題 1.4. $p : E \longrightarrow B$ をファイブレーション、$f : X \longrightarrow B$ を写像とすると、p の f による引き戻し $f^*(p) : f^*(E) = E \times_B X \longrightarrow X$ はファイブレーションである。

証明 任意の位相空間 Y に対し、

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & f^*(E) \arrow[d, "f^*(p)"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

の可換図式を考える。引き戻しの定義を思い出すと、さらに次の可換図式が考えられる。

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & f^*(E) \arrow[r, "p^*(f)"] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[urr, dotted, "\widetilde{H}"] & X \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

外側の可換図では、ホモトピー被覆性質が適用できるため、$\widetilde{H} : Y \times I \longrightarrow E$ で図式を可換にするものが存在する。ここで、$\widetilde{G} : Y \times I \longrightarrow f^*(E)$ を、$\widetilde{G}(y,t) = \left(\widetilde{H}(x,t), H(y,t)\right)$ で定義すると、これが求めるホモトピーの持ち上げである。 $\square$

ファイバー束のとき同様、2つのファイブレーションの間にはファイバーを保つ写像、$(f,g) : (E,B) \longrightarrow (E', B')$ が定義できる。

定義 1.5. 2つのファイバーを保つ写像 $(f,g), (f',g') : (E,B) \longrightarrow (E',B')$ がファイバーホモトピックであるとは、$G : B \times I \longrightarrow B'$, $H : E \times I \longrightarrow E'$ という2つのホモトピーが存在し、$G(x,0) = g(x), H(x,1) = g'(x)$, $H(x,0) = f(x), H(x,1) = f'(x)$ となり、

$$
\begin{tikzcd}
E \times I \arrow[r, "p \times 1_I"] \arrow[d, "H"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\
B \times I \arrow[r, "G"'] & B'
\end{tikzcd}
$$

が可換となる。特に、上の状況下で $B = B'$ で、$g = g' = 1_B$、さらに $G(x,t) = x$ においてファイバーホモトピックのとき、$\tilde{f} \simeq_B \tilde{f}'$ とかく。$(f, 1_B) : (E,B) \longrightarrow (E',B), (g,1_B) : (E',B) \longrightarrow (E,B)$ をファイバーを保つ写像としたとき、$g \circ f \simeq_B 1_E, f \circ g \simeq_B 1'_E$ となるとき、2つのファイブレーション (E,B) と $(E'B)$ はファイバーホモトピー同値といい、$E \simeq_B E'$ とかく。

定理 1.6. $p : E \longrightarrow B$ をファイブレーションとする。$f, g : X \longrightarrow B$ がホモトピックならば、それぞれの引き戻しに対し、$f^*(E) \simeq_B g^*(E)$ となる。

証明 $f \simeq g$ なので、$H : X \times I \longrightarrow B$ をそのホモトピーとする。ここで、$0 \leqq t \leqq 1$ に対し、$i_t : X \longrightarrow X \times I$ を、$x \mapsto (x,t)$ により与えると、$f = H \circ i_0$, $g = H \circ i_1$ である。さて、次の図式は可換である。

$$
\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[rr, "p^*(f)"] \arrow[d, "i_0"'] & & E \arrow[d, "p"] \\
f^*(E) \times I \arrow[r, "f^*(p) \times 1_I"'] \arrow[urr, dotted, "\widetilde{H}"] & E \times I \arrow[r, "H"'] & B
\end{tikzcd}
$$

p がファイブレーションより、$\widetilde{H} : f^*(E) \times I \longrightarrow E$ が存在し、図式を可換にする。このことから、$(\widetilde{H}, H) : (f^*(E) \times I, X \times I) \longrightarrow (E,B)$ は fiber を保つ写像である。

$$
h : f^*(E) \longrightarrow g^*(E)
$$

を、$(x,e) \mapsto (x, \widetilde{H}(x,e,1))$ により与えると、これはファイバーを保つ写像である。$h' : g^*(E) \longrightarrow f^*(E)$ は、ただし、H を H' とすれば $(\widetilde{H'}, H) : (g^*(E) \times I, X \times I) \longrightarrow (E,B)$ というファイバーと保つ写像から構成できる。ただし、$H'(x,t) = H(x, 1-t)$ で与える。さて、$h \circ h' \simeq_X 1$, $h' \circ h \simeq_X 1$ をみたすファイバーホモトピーは以下のように構成する。$J^1 = \partial I \cup I \times \{0\} = \{0\} \times I \cup \{1\} \times I \cup I \times \{0\} \subset I^2$ という上面が抜けた ∂I^2 を考える。$F : f^*(E) \times J^1 \longrightarrow E$ を次で定義する。$(e,x,s,t) \in f^*(E) \times J$ に対し、

$$
F(x,e,s,t) = \begin{cases} \widetilde{H}(e,x,1-t) & s = 0 \\ \widetilde{H'}(h(e,x),t) & s = 1 \\ \widetilde{H}(e,x,1) & t = 0 \end{cases}
$$

また、$G : f^*(E)\times I^2 \longrightarrow B$ を次の合成により定義する。

$$f^*(E)\times I\times I \xrightarrow{f^*(p)\times 1_I\times 1_I} X\times I\times I \xrightarrow{p_{1,3}} X\times I \xrightarrow{H'} B$$

$G_{|X\times J^1} = p\circ F$ であることが確かめられる。ここで対の同相 $(I^2, J^1)\cong (I^2, I\times\{0\})$ であるため、

$$\begin{tikzcd} f^*(E)\times J^1 \arrow[r, "F"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ f^*(E)\times I^2 \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{G}"] & B \end{tikzcd}$$

の可換図式で被覆ホモトピー性質が使えて、$\widetilde{G} : f^*(E)\times I^2 \longrightarrow E$ をえる。そこで、$\varphi : f^*(E)\times I \longrightarrow f^*(E)$ を、$(e,x,t)\mapsto(\widetilde{G}(e,x,t,1),x)$ と定義する。これが、$h'\circ h\simeq_X 1_{f^*(E)}$ を与える。逆のホモトピーも同様に構成できる。 □

系 1.7. $p : E\longrightarrow B$ がファイブレーション、B を弧状連結とすると、任意のファイバーはホモトピー同値である。

証明 $x,y\in B$ に対し、$e_x, e_y : *\longrightarrow B$ を定値写像とすれば、これは弧状連結性によりホモトピックであり、これらによる p の引き戻しがそれぞれのファイバーである。 □

また、重要な定理としてはホモトピー群の完全列を誘導するということである。コファイブレーションがホモロジー群の完全列を誘導したのの双対版である。

命題 1.8. $p : E\longrightarrow B$ を基点を保つファイブレーションとすると、$p_* : \pi_*(E,F,*)\cong\pi_*(B,*)$ は $n\geqq 1$ において同型である。

証明 まず全射から示す。$[f]\in\pi_n(B,*)$ をとると、$f : (I^n,\partial I^n, J^{n-1})\longrightarrow(B,*,*)$ と見なせる。ここで対の同相 $(I^n, J^{n-1})\cong(I^n, I^{n-1}\times\{0\})$ があるため、定値写像 $* : I^{n-1}\times\{0\}\longrightarrow E$ を用いて、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd} J^{n-1} \arrow[r, "*"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

p がファイブレーションにより、$\tilde{f} : I^n \longrightarrow E$ で図式を可換にするものが存在する。これより、$\tilde{f} : (I^n,\partial I^n,J^{n-1})\longrightarrow(E,F,*)$ であり、$p_*[\tilde{f}] = [p\circ\tilde{f}] = [f]$ となる。次に単射を示す。$[f],[g]\in\pi_n(E,F,e_0)$ に対し、$p_*[f] = p_*[g]$ とする。$p\circ f\simeq p\circ g$ なので、$H : (I^n\times I, \partial I^n\times I, J^{n-1}\times I)\longrightarrow(B,*,*)$ をそのホモトピーとする。ここで、$K^n = I^n\times\{0\}\cup I^n\times\{1\}\cup J^{n-1}\times I\subset I^n\times I$ とおく。やはり対の同相 $(I^n\times I, K^n)\cong(I^n\times I, I^n\times\{0\})$ に注意し、これを同一視する。$h : K^n\longrightarrow E$ を、$h_{|I^n\times\{0\}} = f$, $h_{|I^n\times\{1\}} = g$, $h_{|J^{n-1}\times I} = e_0$ で与えれば、

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "h"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n\times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

が可換で、$\widetilde{H} : I^n\times I\longrightarrow E$ をえるが、これが f と g をつなぐホモトピーである。 □

系 1.9. $p : E\longrightarrow B$ を基点を保つファイブレーションとすると、次のホモトピー群の完全列がある。

$$\cdots\longrightarrow\pi_n(F)\xrightarrow{i_*}\pi_n(E)\xrightarrow{p_*}\pi_n(B)\xrightarrow{\partial}\pi_{n-1}(F)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\pi_1(F)\longrightarrow\pi_1(E)\longrightarrow\pi_1(B)$$

証明 対のホモトピー群の完全列と、命題 1.8 に従う。 □

2 ファイブレーションへの近似

任意の写像はファイブレーションにホモトピックで近似することができる。

定義 2.1. $\mathrm{Map}(I,Y)$ を写像空間とし、$0 \leqq t \leqq 1$ に対し、

$$\mathrm{ev}(t) : \mathrm{Map}(I,Y) \longrightarrow Y$$

を、$w \mapsto w(t)$ により与える。また、写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し、ev_0 の f による引き戻しを、E_f とかき写像跡とよぶ。つまり、

$$E_f = \{(x,w) \in X \times \mathrm{Map}(I,Y) \mid f(x) = w(0)\}$$

により定義する。また、$i : X \longrightarrow E_f$ を $x \mapsto (x, e_{f(x)})$、$p : E_f \longrightarrow Y$ を $(w,x) \mapsto w(1)$、$r : E_f \longrightarrow X$ を $(w,x) \mapsto x$ により定義する。

命題 2.2. $p : E_f \longrightarrow Y$ はファイブレーションである。

証明 任意の位相空間 Z において、次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & E_f \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

ここで、$\widetilde{H} : Z \times I \longrightarrow E_f$ を次で定義する。$g(z) = (g_1(z), g_2(z))$ とおいたとき、$\widetilde{H}_1(z,t) = g_1(z)$,

$$\widetilde{H}_2(z,t) = \begin{cases} g_2(z)(s(1+t)) & 0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{1+t} \\ G(z, s(1+t)-1) & \dfrac{1}{1+t} \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

$\widetilde{H}(z,t) = (\widetilde{H}_1(z,t), \widetilde{H}_2(z,t))$ とすれば、これが求めるホモトピーの持ち上げである。 $\square$

補題 2.3. $i : X \longrightarrow E_f$, $r : E_f \longrightarrow X$ は互いにホモトピー逆写像である。

証明 $r \circ i = 1_X$ なので、$i \circ r \simeq 1_{E_f}$ を示す。

$$H : E_f \times I \longrightarrow E_f$$

を $H(x,w,t) = (x, h_{w,t})$ により定義する。ただし、$h_{w,t} : I \longrightarrow Y$ は、$h_{w,t}(s) = w(ts)$ で定義する。これが求めるホモトピーである。 $\square$

以上により、$f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i", "\simeq"'] \arrow[dr, "f"'] & & E_f \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

の可換図式が構成され、ファイブレーションに近似ができた。もともと f がファイブレーションであった場合はどうなるかを考察する。

命題 2.4. $p : E \longrightarrow B$, $q : D \longrightarrow B$ をそれぞれファイブレーションとする。このとき、ホモトピー同値写像 $f : E \longrightarrow D$ が $q \circ f = p$ を満たすならば、f はファイバーホモトピー同値写像である。

証明 示すべきことは、ホモトピー逆写像、そしてそのホモトピーがすべて B 上でとれるかということである。とりあえずはホモトピー逆写像が存在するため、それを $g : D \longrightarrow E$ とおく。$p \circ g = q \circ f \circ g \simeq q$ であるため、そのホモトピーを $H : D \times I \longrightarrow B$ とすると、

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ D \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

は可換であり、p がファイブレーションであることから、ホモトピーの持ち上げ $\widetilde{H}$ が存在する。ここで、$h : D \longrightarrow E$ を $h(x) = \widetilde{H}(x, 1)$ により定義すると、$p \circ h = q$ を満たし $h \simeq g$ である。よって、B 上の f のホモトピー逆写像として、h がとれる。しかしながら、もう少し h を変形する。$h \circ f \simeq 1_E$ を繋ぐホモトピーを G とおく。下の図式は可換で

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "="] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ E \times I \arrow[r, "p \circ G"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{G}"] & B \end{tikzcd}$$

$p \circ G$ の持ち上げを $\widetilde{G}$ とかき、$\widetilde{G}_1 : E \longrightarrow E$ が、$\widetilde{G}_1(x) = \widetilde{G}(x, 1)$ で与えられる。$\widetilde{G}_1 \simeq 1_E$ である。$k = \widetilde{G}_1 \circ h : D \longrightarrow E$ で定義すると、これも B 上の f のホモトピー逆写像である。次に B 上のホモトピーを構成する。$\alpha : E \times I \longrightarrow E$ を、

$$\alpha(e, s) = \begin{cases} \widetilde{G}(h \circ f(e), 1 - 2s) & 0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{2} \\ G(e, 2s - 1) & \dfrac{1}{2} \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

と定義する。

$$\alpha(e, 0) = \widetilde{G}(h \circ f(e), 1) = \widetilde{G}_1 \circ h \circ f(e) = k \circ f(e)$$

$$\alpha(e, 1) = G(e, 1) = G_1(e) = e$$

であり、ホモトピーではあるがファイバーホモトピーでは無い。そこで、

$$\beta \ : \ E \times I \times I \longrightarrow B$$

を、

$$\beta(e, s, t) = \begin{cases} p \circ \widetilde{G}(e, 1 - 2s(1 - t)) & 0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{2} \\ p \circ G(e, 1 - 2(1 - s)(1 - t)) & \dfrac{1}{2} \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

により定義する。このとき、次の図式は可換であり、

$$\begin{tikzcd} E \times I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ E \times I \times I \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dotted, "\gamma"] & B \end{tikzcd}$$

p がファイブレーションであることから、β の持ち上げを γ とかくと、$\gamma_{0,0} = \alpha_0 = k \circ f$, $\gamma_{1,0} = \alpha_1 = 1_E$ なので $k \circ f$ と 1_E を繋ぐホモトピーである。また、

$$p \circ \gamma_{0,*}(e, t) = \beta(e, 0, t) = p \circ \widetilde{G}(e, 1) = p \circ \widetilde{G}_1(e) = p(e)$$

$$p \circ \gamma_{*,1}(e, s) = \beta(e, s, 1) = p(e)$$

$$p \circ \gamma_{1,*}(e, t) = \beta(e, 1, t) = p \circ G(e, 1) = p(e)$$

なので、この I^2 枠をぐるりと回るホモトピーはファイバーホモトピーであるので、それを用いれば求めるファイバーホモトピーが得られ、$k \circ f \simeq_B 1_E$ である。逆も同様で、$f \circ k \simeq_B 1_D$ もわかる。 $\square$

系 2.5. $f : X \longrightarrow Y$ がファイブレーションならば、$p : E_f \longrightarrow Y$ とファイバーホモトピー同値である。