Definition 0.0.1

$f\ :\ X \longrightarrow Y$ に対し、

$$p\ :\ E_f \longrightarrow Y \quad \text{fibration}$$

であるが、このとき、　$y \in Y$ に対し、$F_{f,y} = p^{-1}(y)$ を、f の y 上の homotopy fiber と呼ぶ。ただ、Y が弧状連結の時は、y の取り方によらない（証明は前の本）ので、F_f と書く。よって、inclusion

$$j\ :\ F_f \hookrightarrow E_f$$

は連続写像なので、これをさらに fibration に取り替えることが可能である。そう考えていくと、無限に fibration の列ができる。さて、これからはこの列を深く考察していこう。

Definition 0.0.2

(X, x_0) : 基点つき空間に対し、

$$PX = \{\ f\ :\ I \longrightarrow X \mid f(0) = x_0\ \}$$

で定義し、X の path 空間 (path space) と呼ぶ。また、

$$\Omega X = \{\ f\ :\ I \longrightarrow X \mid f(0) = f(1) = x_0\ \}$$

で定義し、X のループ空間(loop space) とよぶ。

Proposition 0.0.3

$p : PX \longrightarrow X$ を $p(w) = w(1)$ で定義すると、これは fibration

proof)　　$i\ :\ \{x_0\} \longrightarrow X$: inclusion を fibration で取り替えてみると、

$$p' : E_i \longrightarrow X$$

となるわけだが、

$$\begin{aligned} E_i &= \{(x, w) \in \{x_0\} \times Map(I, X) \mid i(x) = w(0)\ \} \\ &= \{w \in Map(I, X) \mid w(0) = x_0\ \} \\ &= PX \end{aligned}$$

また、$p'(x,w) = w(1)$ なので、これにより、$p = p'$である。よって、

$p : PX \longrightarrow X$ は、$i\ :\ \{x_0\} \longrightarrow X$ を fibration で取り替えたものであるから、

$$p : PX \longrightarrow X \qquad \text{fibration} \qquad \square$$

この fibration は良く使うものなので、

$$p : PX \longrightarrow X$$

を、path-loop fibration と名づける。

Proposition 0.0.4

$$j : F_{f,y} \hookrightarrow E_f\ ,\ r : E_f \longrightarrow X$$

に対し、

$$r \circ j : F_{f,y} \longrightarrow X \qquad \text{fibration}$$

であり、$f(x_0) = y$ である $x_0 \in X$ に対するfiber は、ΩY である。

proof) $r \circ j : F_{f,y} \longrightarrow X$ が、path-loop fibration

$$p : PY \longrightarrow Y$$

の pull back であることを示す。とりあえず pull back をとると、

$$f^*(p) : f^*(PY) \longrightarrow X \qquad \text{fibration}$$

が導かれるが、それぞれ細かく見てみよう。

$$\begin{aligned} f^*(PY) &= \{(x,w) \in X \times PY \mid f(x) = p(w)\ \} \\ &= \{(x,w) \in X \times PY \mid f(x) = w(1)\ \} \\ &= \{(x,w) \in X \times Map(I,Y) \mid f(x) = w(1)\ ,\ w(0) = y\ \} \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} F_{f,y} &= \{(x,w) \in X \times Map(I,Y) \mid f(x) = w(0)\ ,\ w(1) = y\ \} \\ &\cong \{(x,w) \in X \times Map(I,Y) \mid f(x) = w(1)\ ,\ w(0) = y\ \} \end{aligned}$$

これより、 $f^*(p) : f^*(PY) \longrightarrow X$ は、 $f^*(p) : F_{f,y} \longrightarrow X$ であり、

$f^*(p)$ が、射影であったことを思い出せば、$f^*(p) = r \circ j$ である。さらに、

$$\begin{aligned}(r \circ j)^{-1}(x_0) &= \{(x,w) \in X \times Map(I,Y) \mid f(x) = w(0)\ ,\ w(1) = y\ ,\ y = x_0\} \\ &= \{(x,w) \in X \times Map(I,Y) \mid f(x_0) = w(0)\ ,\ w(1) = y\ \} \\ &= \{w \in Map(I,Y) \mid w(0) = y = w(1)\ \} \\ &= \Omega Y \qquad \square\end{aligned}$$

さて、これにより、

$$\Omega Y \xrightarrow{q} F_{f,y} \xrightarrow{r \circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

と言った列が出てくる（ただし、q は inclusion）。まぁ、本来なら純粋な fiber ではなく、homotopy fiber で続けていくのが、流儀なので正確には、

$$F_{r \circ j} \xrightarrow{r' \circ j'} F_{f,y} \xrightarrow{r \circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

であるのだが、$r \circ j$ の fiber と、homotopy fiber は、$r \circ j$ が fibration であるため、prop **??** , prop **??** より、homotopy 同値である。それゆえに置き換えているだけである。

では次は、上の列のさらに左に続けていくことを考える。純粋な homotopy fiber の列の方で考えれば、

$$F_{r' \circ j'} \xrightarrow{r'' \circ q''} F_{r \circ j} \xrightarrow{r' \circ j'} F_{f,y} \xrightarrow{r \circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

しかし、先ほど $F_{r \circ j} \simeq \Omega Y$ で置き換えた。では、 $F_{r' \circ j'}$ はなんなのだろうか？これは、先ほどを思い出せば、

$$F_{f,y} \xrightarrow{r \circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

から、その左に ΩY がでてきた。よって、

$$F_{r \circ j} \xrightarrow{r' \circ j'} F_{f,y} \xrightarrow{r \circ j} X$$

の左には ΩX が来ることが予想される。予想と言うか、すでに prop 0.0.4 で証明済みなのである。

Remmark 0.0.5

$$j' : F_{r\circ j} \hookrightarrow E_{r\circ j} \ , \ r' : E_{r\circ j} \longrightarrow F_f$$

に対し、

$$r' \circ j' : F_{r\circ j} \longrightarrow F_f \quad \text{fibration}$$

であり、fiber は ΩX である。

つまり、 $F_{r'\circ j'} \simeq \Omega X$ であり、この事実を使うと、

$$F_{r'\circ j'} \xrightarrow{r''\circ q''} F_{r\circ j} \xrightarrow{r'\circ j'} F_{f,y} \xrightarrow{r\circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

の列は、

$$\Omega X \longrightarrow \Omega Y \xrightarrow{q} F_{f,y} \xrightarrow{r\circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

と見なせるわけである。

ところで、 $\Omega X \longrightarrow \Omega Y$ は、無論、 $r'' \circ j''$: $F_{r'\circ j'} \longrightarrow F_{r\circ j}$ から、誘導されてくるのだが、次のような写像を考えよう。

Definition 0.0.6

f : $X \longrightarrow Y$ に対し、

$$\Omega f \ : \ \Omega X \longrightarrow \Omega Y$$

を、$w \in \Omega X$ に対し、$\Omega f(w) = f \circ w$ で定義する。

ΩX , ΩY は compact open topology を導入して位相空間と見なしているため、その間の写像 Ωf も連続であって欲しい。

Proposition 0.0.7

f : $X \longrightarrow Y$ に対し、

$$\Omega f \ : \ \Omega X \longrightarrow \Omega Y \quad \text{は連続}$$

proof)　　$W(K, U)$: open in ΩY とする。

$$
\begin{aligned}
(\Omega f)^{-1}(W(K,U)) &= \{\ g \in \Omega X \mid \Omega f(g) \in W(K,U)\ \} \\
&= \{\ g \in \Omega X \mid f \circ g \in W(K,U)\ \} \\
&= \{\ g \in \Omega X \mid f \circ g(K) \subset U\ \}
\end{aligned}
$$

ここで、$W(K, f^{-1}(U))$ が g の $(\Omega f)^{-1}(W(K,U))$ 内での開近傍。これより、Ωf は連続。 $\square$

この $\Omega f\ :\ \Omega X \longrightarrow \Omega Y$ と、 $r'' \circ j''\ :\ F_{r' \circ j'} \longrightarrow F_{r \circ j}$ はどういった関係なのか。すぐに思いつくのは、

$$
\begin{tikzcd}
\Omega X \arrow[r, "\Omega f"] \arrow[d, "\simeq"'] & \Omega Y \arrow[d, "\simeq"] \\
F_{r' \circ j'} \arrow[r, "r'' \circ j''"'] & F_{r \circ j}
\end{tikzcd}
$$

の図式が可換であるのではないかということだが、残念ながらそれは正しくない。しかし、若干弱く、homotopy 可換にはなっているのである。ちなみに、縦の homotopy equivalence は、何から誘導されたのかを思い出せば、inclusion であることに気づくのは容易い。

Lemma 0.0.8

$$
\begin{tikzcd}
\Omega X \arrow[r, "\Omega f"] \arrow[d, "k"'] & \Omega Y \arrow[d, "l"] \\
F_{r' \circ j'} \arrow[r, "r'' \circ j''"'] & F_{r \circ j}
\end{tikzcd}
$$

の図式は、homotopy 可換である。ただし、 i , k は inclusion。

proof)　基本的に $F_{r\circ j}$, $F_{r'\circ j'}$ が何だったのか、もう忘れているだろうから具体的に書き表してみよう。初心に帰って、思い起こすと、

$$E_f = \{\ (x,w) \in X \times Map(I,Y) \mid f(x) = w(0)\ \}$$

$$F_f = \{\ (x,w) \in X \times Map(I,Y) \mid f(x) = w(0)\ ,\ w(1) = y_0\ \}$$

であったので、

$$\begin{aligned} E_{r\circ j} &= \{\ ((x,w),w') \in F_f \times Map(I,X) \mid r \circ j(x,w) = w'(0)\ ,\ f(x) = w(0)\ ,\ w(1) = y_0\ \} \\ &= \{\ (x,w,w') \in F_f \times Map(I,X) \mid x = w'(0)\ ,\ f(x) = w(0)\ ,\ w(1) = y_0\ \} \end{aligned}$$

であり、

$$F_{r\circ j} = \{\ (x,w,w') \in F_f \times Map(I,X) \mid x = w'(0)\ ,\ f(x) = w(0)\ ,\ w(1) = y_0\ ,\ w'(1) = x_0\ \}$$

であった。さらには、

$$\begin{aligned} E_{r'\circ j'} = \{\ &((x,w,w'),w'') \in F_{r\circ j} \times Map(I,F_f) \\ &\mid r' \circ j'(x,w,w') = w''(0)\ ,\ x = w'(0)\ ,\ f(x) = w(0)\ ,\ w(1) = y_0\ ,\ w'(1) = x_0\ \} \\ = \{\ &(x,w,w',w'') \in F_{r\circ j} \times Map(I,F_f) \\ &\mid (x,w) = w''(0)\ ,\ x = w'(0)\ ,\ f(x) = w(0)\ ,\ w(1) = y_0\ ,\ w'(1) = x_0\ \} \end{aligned}$$

そして、

$$\begin{aligned} F_{r'\circ j'} = \{\ &(x,w,w',w'') \in F_{r\circ j} \times Map(I,F_f) \\ &\mid (x,w) = w''(0)\ ,\ x = w'(0)\ ,\ f(x) = w(0)\ ,\ w(1) = y_0\ ,\ w''(1) = *\ \} \end{aligned}$$

では、すべて出揃ったところで証明に移ろう。示すのは、

$$l \circ \Omega f \simeq r'' \circ j'' \circ k$$

である。 $w' \in \Omega X$ に対し、

$$l \circ \Omega f(w') = l(f \circ w') = (*, f \circ w', c_{x_0})$$

また、

$$r'' \circ j'' \circ k(w') = r'' \circ j''(*, c_{y_0}, w', c_{x_0}) = (*, c_{y_0}, w')$$

$H\ :\ \Omega X \times I \longrightarrow F_{r\circ j}$　を次で定義する。

$$H(w,t) = (*, \alpha, \beta)$$

ただし、 $\alpha \in Map(I,Y)$, $\beta \in Map(I,X)$ は、

$$\alpha(w',t;s)=\begin{cases} y_0 & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \\ f\circ w'(\{(2t-1)(s-1)+1\}) & \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

$$\beta(w',t;s)=\begin{cases} w'(\{(2t-1)(1-s)+1\}) & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \\ x_0 & \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

これが、well defined である事を確認してもらったら、

$$\alpha(w',0;s)=y_0\ ,\ \alpha(w',1;s)=f\circ w'(s)$$

$$\beta(w',0;s)=w'(s)\ ,\ \beta(w',1;s)=x_0$$

であることもわかり、

$$H(w,0)=(*,c_{y_0},w')=r''\circ j''\circ k(w)\quad ,\quad H(w,1)=(*,f\circ w',c_{x_0})=l\circ\Omega f$$

であるので、

$$l\circ\Omega f\simeq r''\circ j''\circ k \qquad \square$$

と言うわけで、可換ではないものの、homotopy 可換が言えたので、以前の列の $\Omega X\longrightarrow\Omega Y$ の写像は、Ωf と見なす。つまり、ここに次のような列が誕生した。

$$\Omega X\xrightarrow{\Omega f}\Omega Y\xrightarrow{q}F_f\xrightarrow{r\circ j}X\xrightarrow{f}Y$$

では、長くなったがここで、この列の意味を改めて考えていこう。「列」と言って思いつくのは、exact sequence やら、chain complex などであるが、それらは群や R-module と準同型で構成されていた。上の列は位相空間と連続写像の列である。無論、これは exact sequence とも後々深い関わりがある。

Definition 0.0.9

$p\ :\ E\longrightarrow B$ fibration において、fiber を F とする時、

$$F\hookrightarrow E\xrightarrow{p}B$$

を fiber sequence と呼ぶ。

これは、特に目新しい事項と言うわけでもない。しかし、残念ながら話題になっている

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{q} F_f \xrightarrow{r \circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

の列は fiber sequence ではない。しかし、非常に近い性質を持っていることは確かである。そこで今、fiber sequence をやや広げた感のある列と言うのを考えてみよう。

Definition 0.0.10

位相空間と連続写像の列、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

が、homotopy fiber sequence であるとは、ある fiber sequence

$$F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$$

と、homotopy equivalence である各連続写像

$$i \ : \ X \xrightarrow{\simeq} F \quad , \quad j \ : \ Y \xrightarrow{\simeq} E \quad , \quad k \ : \ Z \xrightarrow{\simeq} B$$

が存在し、次の図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"] & Z \arrow[d, "k"] \\ F \arrow[r, hook, "\hookrightarrow"'] & E \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

を homotopy 可換にする。また、より一般に長い列

$$\cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

において、どの連続する 3 項も homotopy fiber sequence であるとき、この長い列を homotopy fiber sequence と呼ぶ。

Corollary 0.0.11

fiber sequence は、homotopy fiber sequence である。

proof)　$F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ fiber sequence とすれば、次の図式より明らか。

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, hook] \arrow[d, "="'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "="] & B \arrow[d, "="] \\
F \arrow[r, hook] & E \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Proposition 0.0.12

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{q} F_f \xrightarrow{r\circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

は、homotopy fiber sequence である。

proof)　$F_f \xrightarrow{r\circ j} X \xrightarrow{f} Y$ は、

$$
\begin{tikzcd}
F_f \arrow[r, "r\circ j"] \arrow[d, "="'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d, "="] \\
F_f \arrow[r, hook] & E_f \arrow[r, "p"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

の図式で、i と r が互いに homotopy inverce であったことを思い出せば、この図式は homotopy 可換となるので、homotopy fiber sequence である。次に、

$$\Omega Y \xrightarrow{q} F_f \xrightarrow{r\circ j} X$$

は、純粋な fiber sequence である。そして、最後に、

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{q} F_f$$

について見ると、

$$
\begin{tikzcd}
\Omega X \arrow[r, "\Omega f"] \arrow[d, "="'] & \Omega Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i"] & F_f \arrow[d, "="] \\
\Omega X \arrow[r, hook] & F_{r\circ j} \arrow[r, "r'\circ j'"'] & F_f
\end{tikzcd}
$$

が、homotopy 可換であることは、lemma 0.0.8 の時のように考えていけばすぐにわかる。　$\square$

そして、考えたくなってくるのが

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{q} F_f \xrightarrow{r\circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

のさらに左側に列を続けていくことである。もうここまでくればわかると思うが、この後は、

$$\cdots \Omega\Omega X \xrightarrow{\Omega\Omega f} \Omega\Omega Y \xrightarrow{\Omega q} \Omega F_f \xrightarrow{\Omega(r\circ j)} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{q} F_f \xrightarrow{r\circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

と言った感じになり、これまた homotopy fiber sequence になることは、この一連の流れを繰り返すことになるのでよいだろう。また表記上、あまりにΩが多いと、それもまたウザイので次のように書こう。

Definition 0.0.13

位相空間 X に対し、

$$\Omega^n X \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\Omega\Omega\Omega\cdots\Omega}_{n\text{ 回}} X$$

とし、X の n 重ループ空間 (n-fold loop space) と呼ぶ。

Theorem 0.0.14

$f : X \longrightarrow Y$ に対し、次の homotopy fiber sequence が存在する。

$$\cdots \longrightarrow \Omega^n F_f \xrightarrow{\Omega^n r\circ j} \Omega^n X \xrightarrow{\Omega^n f} \Omega^n Y \xrightarrow{\Omega^{n-1} q} \Omega^{n-1} F_f \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{q} F_f \xrightarrow{r\circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

Definition 0.0.15

上の Theorem の列を、f の homotopy fiber sequence と呼ぶ。