H-space のほかにも、H-cospace と呼ばれる双対概念があります。

Definition 0.0.1

基点つき空間 $(X, *)$ が H-cospace であるとは、

$$\mu \ : \ X \longrightarrow X \vee X \quad , \quad \nu \ : \ X \longrightarrow X$$

の二つの連続写像が存在して次を満たす。

1) $(\mu \vee 1_X) \circ \mu \simeq (1_X \vee \mu) \circ \mu$

$$\begin{tikzcd}
X \vee X \vee X & X \vee X \arrow[l, "\mu \vee 1_X"'] \\
X \vee X \arrow[u, "1_X \vee \mu"] & X \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

2) $\Gamma \circ (1_X \vee *) \circ \mu \simeq \Gamma \circ (* \vee 1_X) \circ \mu \simeq 1_X$

$$\begin{tikzcd}
X \vee X \arrow[d, "\Gamma"'] & X \vee X \arrow[l, "1_X \vee *"'] \arrow[r, "* \vee 1_X"] & X \vee X \arrow[d, "\Gamma"] \\
X & X \arrow[l, "="] \arrow[r, "="'] \arrow[u, "\mu"'] & X
\end{tikzcd}$$

3) $\mu \circ (\nu \vee 1_X) \circ \Gamma \simeq \mu \circ (1_X \vee \nu) \circ \Delta \simeq *$

$$\begin{tikzcd}
X \vee X \arrow[r, "1_X \vee \nu"] & X \vee X \arrow[d, "\Gamma"] & X \vee X \arrow[l, "\nu \vee 1_X"'] \\
X \arrow[r, "*"'] \arrow[u, "\mu"] & X & X \arrow[l, "*"] \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

ただし、$\Gamma \ : \ X \vee X \longrightarrow X$ は、折りたたみ写像、つまり、$\Gamma([x]) = x$
$* \ : \ X \longrightarrow X$ は、定値写像、つまり、$*(x) = *$ である。

ここで登場した 2 つの写像、$\mu \ : \ X \longrightarrow X \vee X \quad , \quad \nu \ : \ X \longrightarrow X$ を X の H-coassociation と呼ぶ。また、上の 3 つの条件に加え次を満たすものを可換な H-cospace と呼ぶ。

4) $\alpha \circ \mu \simeq \mu$

$$\begin{tikzcd} X \vee X & X \vee X \arrow[l, "\alpha"'] \\ X \vee X \arrow[u, "="] & X \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

ただし、ここでの $\alpha\ :\ X \times X \longrightarrow X \times X$ は、入れ替え写像である。

さて、H-space の定義とどこが違うのか、わかっただろうか。わからなかったら、ここでこの本は閉じて、ウォーリーでも探してください。$\times$ が $\vee$ に変わって矢印が逆を向いただけである。さらに、準同型に変わるのが、次の写像である。

Definition 0.0.2

X , X' : H-cospace とし、その H-coassociation を、

$$\mu\ :\ X \longrightarrow X \vee X \quad , \quad \mu'\ :\ X' \longrightarrow X' \vee X'$$

とする。このとき基点を保つ写像、

$$f\ :\ X \longrightarrow X'$$

が H-comap であるとは、 $(f \vee f) \circ \mu \simeq \mu' \circ f$ を満たすことである。

Theorem 0.0.3

X : H-cospace とするとき、任意の基点つき空間 Y に対し、

$$[X, Y]_*\ :\ \text{位相群}$$

proof) X : H-cospace なので、その H-coassociation を、

$$\mu\ :\ X \longrightarrow X \vee X \quad , \quad \nu\ :\ X \longrightarrow X$$

とするとき、次の二つの写像、

$$\alpha\ :\ [X, Y]_* \times [X, Y]_* \longrightarrow [X, Y]_* \quad , \quad \beta\ :\ [X, Y]_* \longrightarrow [X, Y]_*$$

を次で定義する。

$$\alpha([f],[g]) = [\Gamma \circ (f \vee g) \circ \mu] \quad , \quad \beta([f]) = [\nu \circ f]$$

まぁ、well definded は良いとして、compact open topology の定義からこれは連続となる。そこで、

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha([f],[g]),[h]) &= \alpha([\Gamma \circ (f \vee g) \circ \mu],[h]) \\
&= [\Gamma \circ ((\Gamma \circ (f \vee g) \circ \mu) \vee h) \circ \mu] \\
&= [\Gamma \circ (\Gamma \vee 1_Y) \circ (f \vee g \vee h) \circ (\mu \vee 1_X) \circ \mu]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha([f],\alpha([g],[h])) &= \alpha([f],[\Gamma \circ (g \vee h) \circ \mu]) \\
&= [\Gamma \circ (f \vee (\Gamma \circ (g \vee h) \circ \mu)) \circ \mu] \\
&= [\Gamma \circ (1_Y \vee \Gamma) \circ (f \vee g \vee h) \circ (1_X \vee \mu) \circ \mu]
\end{aligned}$$

ここで、H-coassociation の定義から、 $(\mu \vee 1_Y) \circ \mu \simeq (1_Y \vee \mu) \circ \mu$ であり、 $(1_X \vee \Gamma) \circ \Gamma = (\Gamma \vee 1_X) \circ \Gamma$ であるので、

$$\alpha(\alpha([f],[g]),[h]) = \alpha([f],\alpha([g],[h]))$$

つぎに、

$$\begin{aligned}
\alpha \circ (1 \times *)[f] &= \alpha([f,*]) \\
&= [\Gamma \circ (f \vee *) \circ \mu] \\
&= [\Gamma \circ (1_Y \vee *) \circ \mu \circ f] && \Gamma \circ (1_Y \vee *) \circ \mu \simeq 1_Y \text{ より、} \\
&= [f]
\end{aligned}$$

同じく、 $\alpha \circ (* \times 1_Y)[f] = [f]$ である。さらに、

$$
\begin{aligned}
\alpha\circ(\beta\times 1)\circ\Delta[f] &= \alpha\circ(\beta\times 1)([f],[f])\\
&= \alpha\circ(\beta[f],[f])\\
&= \alpha\circ([\nu\circ f],[f])\\
&= [\Gamma\circ((\nu\circ f)\vee f)\circ\mu]\\
&= [\Gamma\circ(\nu\vee 1_X)\circ\mu\circ f] \qquad\qquad \Gamma\circ(\nu\vee 1_X)\circ\mu\simeq *\text{より、}\\
&= [*\circ f]\\
&= [*]
\end{aligned}
$$

同じくして、 $\alpha\circ(1\times\beta)\circ\Delta[f]=[*]$ が成立。これより、α , βは structure map になり、$[X,Y]_*$ ： 位相群

□

Theorem 0.0.4

X : 基点つき空間に対し、ΣX は $\mathrm{H}-\mathrm{cospace}$ である。

proof)　　H-coassociation、

$$\mu\ :\ \Sigma X\longrightarrow\Sigma X\vee\Sigma X\quad,\quad \nu\ :\ \Sigma X\longrightarrow\Sigma X$$

を次で定義する。

$$\mu[x,t]=\begin{cases}[[x,2t]] & 0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}\\[1ex] [[x,2t-1]] & \dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1\end{cases}\qquad,\qquad \nu[x,t]=[x,1-t]$$

$$H\ :\ \Sigma X\times I\longrightarrow\Sigma X\vee\Sigma X\vee\Sigma X\quad \text{を次で定義する。}$$

$$H([x,t],s)=\begin{cases}[[x,\frac{4t}{1+s}]] & 0\leqq t\leqq\frac{1+s}{4}\\ [[x,4t-1-s]] & \frac{1+s}{4}\leqq t\leqq\frac{2+s}{4}\\ [[x,\frac{4}{2-s}(t-\frac{s+2}{4})]] & \frac{2+s}{4}\leqq t\leqq 1\end{cases}$$

$$G\ :\ \Sigma X\times I\longrightarrow\Sigma X\quad \text{を次で定義する。}$$

$$G([x,t],s) = \begin{cases} * & 0 \leqq t \leqq \frac{1-s}{2} \\ [x, \frac{2t+s-1}{1+s}] & \frac{1-s}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

$F : \Sigma X \times I \longrightarrow \Sigma X$ を次で定義する。

$$F([x,t],s) = \begin{cases} [x, \frac{s-1+2t}{1+s}] & 0 \leqq t \leqq \frac{1-s}{2} \\ * & \frac{1-s}{2} \leqq t \leqq \frac{1+s}{2} \\ [x, \frac{2(s+1-t)}{1+s}] & \frac{1+s}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

により、

$$(\mu \vee 1) \circ \mu \overset{H}{\simeq} (1 \vee \mu) \circ \mu \ \ , \ \ \Gamma \circ (1 \vee *) \circ \mu \overset{G}{\simeq} 1_X \ \ , \ \ \Gamma \circ (1 \vee \nu) \circ \mu \overset{F}{\simeq} *$$

これより、 ΣX : H-cospace

$\square$

Proposition 0.0.5

X , Y : 基点つき空間 , $f : X \longrightarrow Y$ 基点を保つ写像に対し、

$\Sigma f : \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ は $\mathrm{H-comap}$

proof) 次の図式の homotopy 可換を示せばよい。

$$\begin{tikzcd} \Sigma X \vee \Sigma X \arrow[r, "\Sigma f \vee \Sigma f"] & \Sigma Y \vee \Sigma Y \\ \Sigma X \arrow[u, "\mu_X"] \arrow[r, "\Sigma f"'] & \Sigma Y \arrow[u, "\mu_Y"'] \end{tikzcd}$$

ここで、$[x,t] \in \Sigma X$ に対し、

$$\mu_Y \circ \Sigma f[x,t] = \mu_Y[f(x),t] = \begin{cases} [f(x),2t] & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \\ [f(x),2t-1] & \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

また、

$$(\Sigma f \vee \Sigma) \circ \mu_X[x,t] = \Sigma f \vee \Sigma f \circ \begin{cases} [x,2t] \\ [x,2t-1] \end{cases} = \begin{cases} [f(x),2t] & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \\ [f(x),2t-1] & \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

よって、homotopy 可換なんてみみっちいこと言わずに本当に可換である。

□

Proposition 0.0.6

X, Y, Z : 基点つき空間、$f : X \longrightarrow Y$ 基点を保つ写像に対し、

$$(\Sigma f)^* : [\Sigma Y, Z]_* \longrightarrow [\Sigma X, Z]_* \quad \text{は準同型}$$

proof) 上記の命題群を総合すればおのずと導かれる。

□

Theorem 0.0.7

$i : A \longrightarrow X$: 基点をつき cofibration と、任意の基点つき空間 Z に対し、

$$[\Sigma(X/A), Z]_* \xrightarrow{(\Sigma p)^*} [\Sigma X, Z]_* \xrightarrow{(\Sigma i)^*} [\Sigma A, Z]_*$$

は群の完全列である。（ただし、i : inclusion）

proof) ここで、

$$[\Sigma X, Z]_* \cong [X \wedge S^1, Z]_* \cong [S^1, \mathrm{Map}_*(X, Z)]_* = \pi_1(\mathrm{Map}_*(X, Z))$$

であったので、次の可換図式が成立する。

$$\begin{tikzcd}
{[\Sigma(X/A), Z]_*} \arrow[r, "(\Sigma p)^*"] \arrow[d, "\cong"'] & {[\Sigma X, Z]_*} \arrow[r, "(\Sigma i)^*"] \arrow[d, "\cong"'] & {[\Sigma A, Z]_*} \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_1(\mathrm{Map}_*(X/A, Z)) \arrow[r, "(p^*)_*"'] & \pi_1(\mathrm{Map}_*(X, Z)) \arrow[r, "(i^*)_*"'] & \pi_1(\mathrm{Map}_*(A, Z))
\end{tikzcd}$$

ここで、

$$i : A \longrightarrow X \quad \text{cofibration} \Longrightarrow \quad i^* : \mathrm{Map}_*(X, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(A, Z) \quad \text{fibration}$$

であり、その fiber は $\mathrm{Map}_*(X/A, Z)$ であるため、

$$\mathrm{Map}_*(X/A, Z) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Map}_*(X, Z) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Map}_*(A, Z)$$

は、fiber sequence であり、そうなると上の可換図の下列は完全となる。これにより、上列も完全となる。

Theorem 0.0.8

$i\ :\ A \longrightarrow X$: 基点をつき cofibration と、任意の基点つき空間 Z、$n \geqq 1$ に対し、

$$[\Sigma^n(X/A), Z]_* \xrightarrow{(\Sigma^n p)^*} [\Sigma^n X, Z]_* \xrightarrow{(\Sigma i)^*} [\Sigma^n A, Z]_*$$

は群の完全列である。(ただし、i : inclusion)

Lemma 0.0.9

基点付き homotopy cofiber sequence

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

で、任意の基点つき W と、$n \geqq 1$ に対し、

$$[\Sigma^n Z, W]_* \xrightarrow{(\Sigma^n g)^*} [\Sigma^n Y, W]_* \xrightarrow{(\Sigma^n f)_*} [\Sigma^n Z, W]_*$$

は群の完全列である。

proof) homotopy cofiber sequence の定義から、ある cofiber sequence

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B/A$$

が存在して、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\simeq"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\simeq"] & Z \arrow[d, "\simeq"] \\
A \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "p"'] & B/A
\end{tikzcd}$$

の図式が homotopy 可換となる。これより、次の図式が生まれる。

$$\begin{tikzcd}
{[\Sigma^n Z, W]_*} \arrow[r, "(\Sigma^n g)^*"] \arrow[d, "\cong"'] & {[\Sigma^n Y, W]_*} \arrow[r, "(\Sigma^n f)^*"] \arrow[d, "\cong"] & {[\Sigma^n X, W]_*} \arrow[d, "\cong"] \\
{[\Sigma^n (B/A), W]_*} \arrow[r, "(\Sigma^n p)^*"'] & {[\Sigma^n B, W]_*} \arrow[r, "(\Sigma^n i)^*"'] & {[\Sigma^n A, W]_*}
\end{tikzcd}$$

この図式は homotopy 可換ではなく本当に可換である。また、Th 0.0.8 より下横列は exact で、縦列がすべて同型なので上横列も exact となる。

□

Theorem 0.0.10

X , Y , Z : 基点付き空間 , f : $X \longrightarrow Y$ 基点を保つ写像に対し、次の完全列がある。

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma^n C_f, Z]_* \xrightarrow{(\Sigma^n p\circ j)^*} [\Sigma^n Y, Z]_* \xrightarrow{(\Sigma^n f)^*} [\Sigma^n X, Z]_* \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma^2 X, Z]_* \xrightarrow{(\Sigma q)^*} [\Sigma C_f, Z]_* \xrightarrow{(\Sigma p\circ j)^*} [\Sigma Y, Z]_* \xrightarrow{(\Sigma f)^*} [\Sigma X, Z]_*$$

proof) f の homotopy cofiber sequence と、lemma 0.0.9 より明らか。

□

Corollary 0.0.11

$i : A \longrightarrow X$ が基点付き cofibration であれば、次の完全列がある。

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma^n (X/A), Z]_* \xrightarrow{(\Sigma^n p\circ j)^*} [\Sigma^n X, Z]_* \xrightarrow{(\Sigma^n i)^*} [\Sigma^n A, Z]_* \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma^2 X, Z]_* \xrightarrow{(\Sigma q)^*} [\Sigma X/A, Z]_* \xrightarrow{(\Sigma p\circ j)^*} [\Sigma X, Z]_* \xrightarrow{(\Sigma i)^*} [\Sigma A, Z]_*$$

Brown 関手の表現可能定理により、Z を $K(\pi, n)$ とおけば次の完全列となる。

Theorem 0.0.12

(X, A) が CW pair とすると、次の完全列の存在する。

$$\widetilde{H}^0(X/A) \xrightarrow{p^*} \widetilde{H}^0(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{H}^0(A) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}^1(X/A) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}^n(X/A) \xrightarrow{p^*} \widetilde{H}^n(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{H}^n(A) \longrightarrow \cdots$$

proof) Brown 表現定理により、$[X, K(\pi, m)]_* \cong \widetilde{H}^m(X)$ であったので、これと懸垂定理を合わせ、m を十分大きくすれば、求める完全列が導かれる。

□