　位相群より若干弱いものに、H-space と呼ばれるものがあります。定義はほぼ位相群と同じなので、間違い探しのような気分で眺めてください。

Definition 0.0.1

基点つき空間 $(X,*)$ が H-space であるとは、

$$\mu \ :\ X \times X \longrightarrow X \quad , \quad \nu \ :\ X \longrightarrow X$$

の二つの連続写像が存在して次を満たす。

1)　$\mu \circ (\mu \times 1_X) \simeq \mu \circ (1_X \times \mu)$

$$\begin{tikzcd}
X \times X \times X \arrow[r, "\mu \times 1_X"] \arrow[d, "1_X \times \mu"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X
\end{tikzcd}$$

2)　$\mu \circ (1_X \times *)\Delta \simeq \mu \circ (* \times 1_X) \circ \Delta \simeq 1_X$

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "1_X \times *"] & X \times X \arrow[d, "\mu"] & X \times X \arrow[l, "* \times 1_X"'] \\
X \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "="'] & X & X \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[l, "="]
\end{tikzcd}$$

3)　$\mu \circ (\nu \times 1_X) \circ \Delta \simeq \mu \circ (1_X \times \nu) \circ \Delta \simeq *$

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[d, "\mu"'] & X \times X \arrow[l, "1_X \times \nu"'] \arrow[r, "\nu \times 1_X"] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
X & X \arrow[u, "\Delta"] \arrow[l, "*"] \arrow[r, "*"'] & X
\end{tikzcd}$$

ただし、$\Delta \ :\ X \longrightarrow X \times X$ は、対角写像、つまり、$\Delta(x) = (x,x)$

$* \ :\ X \longrightarrow X$ は、定値写像、つまり、$*(x) = *$ である。

ここで登場した２つの写像、$\mu\ :\ X\times X\longrightarrow X\ \ ,\ \ \nu\ :\ X\longrightarrow X$ を X の H-association と呼ぶ。また、上の３つの条件に加え次を満たすものを可換な H-space と呼ぶ。

4)　　$\mu\circ\alpha\simeq\mu$

$$\begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{\alpha} & X\times X \\ {\scriptstyle =}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ X\times X & \xrightarrow[\mu]{} & X \end{array}$$

ただし、ここでの $\alpha\ :\ X\times X\longrightarrow X\times X$ は、入れ替え写像、つまり、$\alpha(x,y)=(y,x)$ である。

さて、位相群の定義とどこが違うのか、わかっただろうか。わからなかったら、ここでこの本は閉じて、ハリー・ポッターでも読んでください。$=$ が $\simeq$ に変わっただけである。さらに、準同型に変わるのが、次の写像である。

Definition 0.0.2

$X\ ,\ X'$: H-space とし、その H-association を、

$$\mu\ :\ X\times X\longrightarrow X\ \ ,\ \ \mu'\ :\ X'\times X'\longrightarrow X'$$

とする。このとき基点を保つ写像、

$$f\ :\ X\longrightarrow X'$$

が H-map であるとは、 $\mu'\circ(f\times f)\simeq f\circ\mu$ を満たすことである。

Theorem 0.0.3

Y : H-space とするとき、任意の基点つき空間 X に対し、

$$[X,Y]_*\ :\ \text{位相群}$$

proof)　　Y : H-space なので、その H-association を、

$$\mu\ :\ Y\times Y\longrightarrow Y\ \ ,\ \ \nu\ :\ Y\longrightarrow Y$$

とするとき、次の二つの写像、

$$\alpha\ :\ [X,Y]_* \times [X,Y]_* \longrightarrow [X,Y]_*\quad ,\quad \beta\ :\ [X,Y]_* \longrightarrow [X,Y]_*$$

を次で定義する。

$$\alpha([f],[g]) = [\mu \circ (f \times g) \circ \Delta]\quad ,\quad \beta([f]) = [\nu \circ f]$$

まぁ、well definded は良いとして、compact open topology の定義からこれは連続となる。そこで、

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha([f],[g]),[h]) &= \alpha([\mu \circ (f \times g) \circ \Delta],[h]) \\
&= [\mu \circ ((\mu \circ (f \times g) \circ \Delta) \times h) \circ \Delta] \\
&= [\mu \circ (\mu \times 1_Y) \circ (f \times g \times h) \circ (\Delta \times 1_X) \circ \Delta]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha([f],\alpha([g],[h])) &= \alpha([f],[\mu \circ (g \times h) \circ \Delta]) \\
&= [\mu \circ (f \times (\mu \circ (g \times h) \circ \Delta)) \circ \Delta] \\
&= [\mu \circ (1_Y \times \mu) \circ (f \times g \times h) \circ (1_X \times \Delta) \circ \Delta]
\end{aligned}$$

ここで、H-association の定義から、$\mu\circ(\mu\times 1_Y) \simeq \mu\circ(1_Y\times\mu)$ であり、$(1_X\times\Delta)\circ\Delta = (\Delta \times 1_X) \circ \Delta$ であるので、

$$\alpha(\alpha([f],[g]),[h]) = \alpha([f],\alpha([g],[h]))$$

つぎに、

$$\begin{aligned}
\alpha \circ (1 \times *)[f] &= \alpha([f],*) \\
&= [\mu \circ (f \times *) \circ \Delta] \\
&= [\mu \circ (1_Y \times *) \circ \Delta \circ f] \qquad\qquad \mu \circ (1_Y \times *) \circ \Delta \simeq 1_Y \text{ より、} \\
&= [f]
\end{aligned}$$

同じく、 $\alpha \circ (* \times 1_Y)[f] = [f]$ である。さらに、

$$\begin{aligned}
\alpha \circ (\beta \times 1) \circ \Delta[f] &= \alpha \circ (\beta \times 1)([f],[f]) \\
&= \alpha \circ (\beta[f],[f]) \\
&= \alpha \circ ([\nu \circ f],[f]) \\
&= [\mu \circ ((\nu \circ f) \times f) \circ \Delta] \\
&= [\mu \circ (\nu \times 1_Y) \circ \Delta \circ f] \qquad\qquad \mu \circ (\nu \times 1_Y) \circ \Delta \simeq * \text{より、} \\
&= [* \circ f] \\
&= [*]
\end{aligned}$$

同じくして、 $\alpha \circ (1 \times \beta) \circ \Delta[f] = [*]$ が成立。これより、α , βは structure map になり、$[X,Y]_*$: 位相群 $\square$

Proposition 0.0.4

Y , Z : H-space , f : $Y \longrightarrow Z$: H-map

ここで、任意の基点つき空間 X に対し、

$$f_* \ : \ [X,Y]_* \longrightarrow [X,Z]_* \qquad \text{は準同型}$$

proof) 次の図式の可換を示せばよい。

$$\begin{tikzcd}
{[X,Y]_* \times [X,Y]_*} \arrow[r, "f_* \times f_*"] \arrow[d, "\alpha_Y"'] & {[X,Z]_* \times [X,Z]_*} \arrow[d, "\alpha_Z"] \\
{[X,Y]_*} \arrow[r, "f_*"'] & {[X,Z]_*}
\end{tikzcd}$$

ただし、 α_Y , α_Z は、Th 0.0.3 で構成した積である。ここで、

$([g],[h]) \in [X,Y]_* \times [X,Y]_*$ に対し、

$$
\begin{aligned}
\alpha_Z \circ (f_* \times f_*)([g],[h]) &= \alpha_Z([f \circ g],[f \circ h]) \\
&= [\mu_Z \circ (f \circ g \times f \circ h) \circ \Delta] \\
&= [\mu_Z \circ (f \times f) \circ (g \times h) \circ \Delta] && \text{H}-\text{map の定義から} \\
&= [f \circ \mu_Y \circ (g \times h) \circ \Delta] \\
&= f_*[\mu_Y \circ (g \times h) \circ \Delta] \\
&= f_* \circ \alpha_Y([g],[h])
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad \alpha_Z \circ (f_* \times f_*) = f_* \circ \alpha_Y \qquad \square$$

上の準同型を f から誘導された準同型と呼ぶ。

Theorem 0.0.5

X : 基点つき空間に対し、ΩX はH-space である。

proof)　H-association、

$$\mu \ : \ \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X \quad , \quad \nu \ : \ \Omega X \longrightarrow \Omega X$$

を次で定義する。

$$\mu(f,g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \\ g(2t-1) & \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases} \qquad , \qquad \nu(f)(t) = f(1-t)$$

とりあえず、これが連続であることを示そう。まずは μ の連続性。

$$W(K,U) \ : \ \text{open in } \Omega\text{X} \quad \text{とすると、}$$

K : compact in I より、有限個の閉区間の disjoint union で表せるので、

$$K = \coprod_{i=1}^{n} [t_i, s_i]$$

よって、$W(K,U) = W(\coprod_{i=1}^{n}[ti, si], U) = \bigcap_{i=1}^{n} W([t_i, s_i], U)$。これより、

$$\mu^{-1}(W(K,U)) = \mu^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} W([t_i,s_i],U)) = \bigcap_{i=1}^{n} \mu^{-1}(W([t_i,s_i],U))$$

ここで、$\mu^{-1}(W([t_i,s_i],U))$: open in $\Omega X\times\Omega X$ を示せばよい。ところで、

$$\begin{aligned}\mu^{-1}(W([t_i,s_i],U)) &= \{(f,g)\in\Omega X\times\Omega X \mid \mu(f,g)\in W([t_i,s_i],U)\ \}\\ &= \{(f,g)\in\Omega X\times\Omega X \mid \mu(f,g)[t_i,s_i]\subset U\ \}\end{aligned}$$

$$\mu(f,g)(t)=\begin{cases} f(2t) & 0\leqq t\leqq \dfrac{1}{2}\\ g(2t-1) & \dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1\end{cases}\quad,\qquad \nu(f)(t)=f(1-t)$$

であったことを思い出しつつ、次の場合分けを考えよう。

1. $\dfrac{1}{2}\in[t_i,s_i]$ のとき、$1\leqq 2s_i$, $2t_i-1\leqq 0$ なので、

$$f[2t_i,1]\subset U\ ,\ g[0,2s_i-1]\subset U$$

   これより、$W([2t_i,1],U)\times W([0,2s_i-1],U)$ が、(f,g) の $\mu^{-1}(W([t_i,s_i],U))$ 内での開近傍。

2. $s_i<\dfrac{1}{2}$ のとき、$f[2t_i,s_i]\subset U$

   これより、$W([2t_i,2s_i],U)\times\Omega X$ が、(f,g) の $\mu^{-1}(W([t_i,s_i],U))$ 内での開近傍。

3. $\dfrac{1}{2}<t_i$ のとき、$g[2t_i-1,2s_i-1]\subset U$

   これより、$\Omega X\times W([2t_i-1,2s_i-1],U)$ が、(f,g) の $\mu^{-1}(W([t_i,s_i],U))$ 内での開近傍。これより、μ が連続である。続いて、ν の連続性。

流れは μ と同じである。

$$W(K,U)\ :\ \text{open in }\Omega\text{X}\quad とすると、$$

K : compact in I より、有限個の閉区間の disjoint union で表せるので、

$$K=\coprod_{i=1}^{n}[t_i,s_i]$$

よって、$W(K,U)=W(\coprod_{i=1}^{n}[ti,si],U)=\bigcap_{i=1}^{n}W([t_i,s_i],U)$。これより、

$$\nu^{-1}(W(K,U))=\nu^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n}W([t_i,s_i],U))=\bigcap_{i=1}^{n}\nu^{-1}(W([t_i,s_i],U))$$

ここで、$\nu^{-1}(W([t_i, s_i], U))$: open in ΩX を示せばよい。ところで、

$$\begin{aligned}\nu^{-1}(W([t_i, s_i], U)) &= \{\ f \in \Omega X \mid \nu(f) \in W([t_i, s_i], U)\ \} \\ &= \{\ f \in \Omega X \mid \nu(f)[t_i, s_i] \subset U\ \} \\ &= \{\ f \in \Omega X \mid f[1 - s_i, 1 - t_i] \subset U\ \}\end{aligned}$$

よって、$W([1 - s_i, 1 - t_i], U)$ が f の $\nu^{-1}(W([t_i, s_i], U))$ 内での開近傍。これより、ν も連続。

そして、次を考えよう。

$$H\ :\ \Omega X \times \Omega X \times \Omega X \times I \longrightarrow \Omega X \quad \text{を次で定義する。}$$

$$H([f],[g],[h],t)(s) = \begin{cases} f(\frac{4s}{1+t}) & 0 \leqq s \leqq \frac{1+t}{4} \\ g(4s - 1 - t) & \frac{1+t}{4} \leqq s \leqq \frac{2+t}{4} \\ h(\frac{4}{2-t}(s - \frac{t+2}{4})) & \frac{2+t}{4} \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

$$G\ :\ \Omega X \times I \longrightarrow \Omega X \quad \text{を次で定義する。}$$

$$G([f],t)(s) = \begin{cases} * & 0 \leqq s \leqq \frac{1-t}{2} \\ f(\frac{2s+t-1}{1+t}) & \frac{1-t}{2} \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

$$F\ :\ \Omega X \times I \longrightarrow \Omega X \quad \text{を次で定義する。}$$

$$F([f],t)(s) = \begin{cases} f(\frac{t-1+2s}{1+t}) & 0 \leqq s \leqq \frac{1-t}{2} \\ * & \frac{1-t}{2} \leqq s \leqq \frac{1+t}{2} \\ f(\frac{2(t+1-s)}{1+t}) & \frac{1+t}{2} \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

これらが、それぞれ H-association の 3 つの条件のホモトピーになっている事は、ホモトピー群の群演算を計算したことのある人なら理解できることだろう。だが、それ以前に重要な問題として、H, G, F の連続性が残っている。compact open topology を考えて示していくのだが、はっきり言ってもう面倒くさいのであとは各自確認しておいてください。 $\square$

Proposition 0.0.6

X , Y : 基点つき空間 , $f : X \longrightarrow Y$ 基点を保つ写像に対し、

$$\Omega f : \Omega X \longrightarrow \Omega Y \qquad \text{は H} - \text{map}$$

proof) 次の図式の homotopy 可換を示せばよい。

$$\begin{tikzcd} \Omega X \times \Omega X \arrow[r, "\Omega f \times \Omega f"] \arrow[d, "\mu_X"'] & \Omega Y \times \Omega Y \arrow[d, "\mu_Y"] \\ \Omega X \arrow[r, "\Omega f"'] & \Omega Y \end{tikzcd}$$

ここで、$(g, h) \in \Omega X \times \Omega X$ に対し、

$$\mu_Y \circ (\Omega f \times \Omega f)(g,h)(t) = \mu_Y(f \circ g, f \circ h)(t) = \begin{cases} f \circ g(2t) & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \\ f \circ h(2t-1) & \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

また、

$$\Omega f \circ \mu_X(g,h)(t) = \Omega f \circ \begin{cases} g(2t) \\ h(2t-1) \end{cases} = \begin{cases} f \circ g(2t) & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \\ f \circ h(2t-1) & \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

よって、homotopy 可換なんてみみっちいこと言わずに本当に可換である。 □

Proposition 0.0.7

X, Y, Z : 基点つき空間、$f : X \longrightarrow Y$ 基点を保つ写像に対し、

$$(\Omega f)_* : [Z, \Omega X]_* \longrightarrow [Z, \Omega Y]_* \qquad \text{は準同型}$$

proof) 上記の命題群を総合すればおのずと導かれる。 □

Theorem 0.0.8

$p : E \longrightarrow B$: 基点をつき fibration と、任意の基点つき空間 Z に対し、

$$[Z, \Omega F]_* \xrightarrow{(\Omega i)_*} [Z, \Omega E]_* \xrightarrow{(\Omega p)_*} [Z, \Omega B]_*$$

は群の完全列である。（ただし、i : inclusion）

proof)　　Kernel と Imege の一致を示す。$[f] \in [Z, \Omega F]_*$ に対し、

$$(\Omega p)_* \circ (\Omega i)_*[f] = [\Omega(p \circ i) \circ f]$$

$F = p^{-1}(*)$ を思い出せば、$p \circ i = *$。よって、

$$(\Omega p)_* \circ (\Omega i)_*[f] = [*] = 0$$

また、$[g] \in [Z, \Omega E]_*$ において、$(\Omega p)_*[g] = 0$ とする。よって、

$$(\Omega p)_*[g] = [\Omega p \circ g] = 0$$

つまり、$\Omega p \circ g \simeq *$ である。ここで、その homotopy を、

$$H \ : \ Z \times I \longrightarrow \Omega B$$

とおけば、$H(z,0) = p \circ g(z)$ ， $H(z,1) = *$, $H(*,t) = *$。ここで、

$$\tilde{g} \ : \ Z \times I \longrightarrow E \qquad \text{を、} \quad \tilde{g}(z,t) = g(z)(t)$$

$$\tilde{H} \ : \ Z \times I \times I \longrightarrow B \qquad \text{を、} \quad \tilde{H}(z,t,s) = H(z,s)(t)$$

で定義する。ここで、

$$\tilde{H}(z,t,0) = H(z,0)(t) = p \circ g(z)(t) = p \circ \tilde{g}(z,t)$$

なので、次の図式

$$\begin{tikzcd}
Z \times I \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
Z \times I \times I \arrow[r, "\tilde{H}"'] & B
\end{tikzcd}$$

は可換になり、p : fibration なので、

$$^{\exists}G \ : \ Z \times I \times I \longrightarrow E$$

で次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
Z \times I \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
Z \times I \times I \arrow[r, "\tilde{H}"'] \arrow[ur, "G"] & B
\end{tikzcd}$$

ここで、$G_1 \ : \ Z \times I \longrightarrow E$ に対し、

$$p \circ G_1(z,t) = \tilde{H}_1(z,t) = \tilde{H}(z,t,1) = H(z,1)(t) = *$$

$\therefore \qquad G_1(z,t) \in p^{-1}(*) = F$ 　であるため、

$$G_1 \ : \ Z \times I \longrightarrow F$$

と見なせる。よって、

$$\mathrm{ad}(G_1) \ : \ Z \longrightarrow \Omega F$$

は連続となり、$[\mathrm{ad}(G_1)] \in [Z, \Omega F]_*$ であって、

$$(\Omega i)_*(\mathrm{ad}(G_1))(z)(t) = i \circ G_1(z,t) \simeq \tilde{g}(z,t)$$

これより、

$$(\Omega i)_*(\mathrm{ad}(G_1)) \simeq g$$

よって、$(\Omega i)_*[\mathrm{ad}(G_1)] = [g]$ 。以上により、題意の完全性が示された。 $\square$

Theorem 0.0.9

$p \ : \ E \longrightarrow B$: 基点をつき fibration と、任意の基点つき空間 Z、$n \geqq 1$ に対し、

$$[Z, \Omega^n F]_* \xrightarrow{(\Omega^n i)_*} [Z, \Omega^n E]_* \xrightarrow{(\Omega^n p)_*} [Z, \Omega^n B]_*$$

は群の完全列である。（ただし、i : inclusion）

Lemma 0.0.10

基点付き homotopy fiber sequence

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

で、任意の基点つき W と、$n \geqq 1$ に対し、

$$[W, \Omega^n X]_* \xrightarrow{(\Omega^n f)_*} [W, \Omega^n Y]_* \xrightarrow{(\Omega^n g)_*} [W, \Omega^n Z]_*$$

は群の完全列である。

proof) 　　homotopy fiber sequence の定義から、ある fiber sequence

$$F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$$

が存在して、

$$
\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
\simeq\downarrow & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\
F & \xrightarrow[i]{} & E & \xrightarrow[p]{} & B
\end{array}
$$

の図式が homotopy 可換となる。これより、次の図式が生まれる。

$$
\begin{array}{ccccc}
[W, \Omega^n X]_* & \xrightarrow{(\Omega^n f)_*} & [W, \Omega^n Y]_* & \xrightarrow{(\Omega^n g)_*} & [W, \Omega^n Z]_* \\
\cong\downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
[W, \Omega^n F]_* & \xrightarrow[(\Omega^n i)_*]{} & [W, \Omega^n E]_* & \xrightarrow[(\Omega^n p)_*]{} & [W, \Omega^n B]_*
\end{array}
$$

この図式は homotopy 可換ではなく本当に可換である。また、Th 0.0.9 より下横列は exact で、縦列がすべて同型なので上横列も exact となる。 □

Theorem 0.0.11

X , Y , Z : 基点付き空間 , $f : X \longrightarrow Y$ 基点を保つ写像に対し、次の完全列がある。

$$
\cdots \longrightarrow [Z, \Omega^n F_f]_* \overset{(\Omega^n r\circ j)_*}{\longrightarrow} [Z, \Omega^n X]_* \overset{(\Omega^n f)_*}{\longrightarrow} [Z, \Omega^n Y]_* \overset{(\Omega^{n-1} q)_*}{\longrightarrow} [Z, \Omega^{n-1} F_f]_* \longrightarrow \cdots
$$

$$
\cdots \longrightarrow [Z, \Omega F_f]_* \overset{(\Omega r\circ j)_*}{\longrightarrow} [Z, \Omega X]_* \overset{(\Omega f)_*}{\longrightarrow} [Z, \Omega Y]_*
$$

proof) f の homotopy fiber sequence と、lemma 0.0.10 より明らか。 □

また、上の列で $Z = S^0$ とすれば、次の列が誕生する。

Theorem 0.0.12

X, Y : 基点付き空間 , $f : X \longrightarrow Y$ 基点を保つ写像に対し、次の完全列がある。

$$
\cdots \longrightarrow \pi_n(F_f) \overset{(r\circ j)_*}{\longrightarrow} \pi_n(X) \overset{f_*}{\longrightarrow} \pi_n(Y) \overset{q_*}{\longrightarrow} \pi_{n-1}(F_f) \longrightarrow \cdots
$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(F_f) \xrightarrow{(r\circ j)_*} \pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y)$$

proof)　$[S^0, \Omega^n X]_* = \pi_0(\Omega^n X) \cong \pi_n(X)$ より。 □

さらに、$p\ :\ E \longrightarrow B$: fibration に対し、次の完全列がある。

Theorem 0.0.13

$p\ :\ E \longrightarrow B$ 基点つき fibration に対し、次の完全列がある。

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{f_*} \pi_n(B) \xrightarrow{q_*} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E) \xrightarrow{f_*} \pi_1(B)$$

proof)　fibration の homotopy fiber と fiber は homotopy 同値より明らか。□