えっ、いまさら群ですか？と気後れしてしまうかもしれない。しかし、よく知られている群の定義は何か演算が導入されていて、それが結合律を満たし、単位元と逆元が存在することであろう。さらに可換ならばそれをアーベル群と呼んだと思う。ところで、演算とはなんなのか？足し算や、掛け算とは一体どういうものなのか？それは二つのものから一つのものを構成する法則、つまり写像なのである。

Definition 0.0.1

集合 G が群であるとは、$* \in G$ と、

$$\mu \ : \ G \times G \longrightarrow G$$

$$\nu \ : \ G \longrightarrow G$$

の二つ写像が与えられ、次を満たす。

1) $\mu \circ (\mu \times 1_G) = \mu \circ (1_G \times \mu)$

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times 1_G"] \arrow[d, "1_G \times \mu"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd}$$

2) $\mu \circ (1_G \times *) \circ \Delta = \mu \circ (* \times 1_G) \circ \Delta = 1_G$

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "1_G \times *"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \times G \arrow[l, "* \times 1_G"'] \\
G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "="'] & G & G \arrow[l, "="] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

3) $\mu \circ (\nu \times 1_G) \circ \Delta = \mu \circ (1_G \times \nu) \circ \Delta = *$

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[d, "\mu"'] & G \times G \arrow[l, "1_G \times \nu"'] \arrow[r, "\nu \times 1_G"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G & G \arrow[l, "*"] \arrow[r, "*"'] \arrow[u, "\Delta"'] & G
\end{tikzcd}$$

ただし、$\Delta : G \longrightarrow G \times G$ は、対角写像、つまり、$\Delta(g) = (g, g)$
$* : G \longrightarrow G$ は、定値写像、つまり、$*(g) = *$ である。

言うならばこれが正確な、もとい都合のよい群の定義である。何が都合がよいのかというと、群と位相空間を同時に考えた位相群というのがあるのだが、その定義にはどうしてもこの演算を写像で考える必要がある。ここで登場した 2 つの写像、$\mu : G \times G \longrightarrow G$, $\nu : G \longrightarrow G$ を G の structure map と呼ぶ。また、上の 3 つの条件に加え次を満たすものをアーベル群と呼ぶ。

4) $\mu \circ \alpha = \mu$

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "="'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd}$$

ただし、ここでの $\alpha : G \times G \longrightarrow G \times G$ は、入れ替え写像、つまり、$\alpha(g, h) = (h, g)$ である。

ちなみに、群の間の写像といえば準同型とお決まりのようになっているが、この準同型の定義も可換図で描くと次のようになる。

Definition 0.0.2

G, G' : 群とし、そのstructure map を、

$$\mu : G \times G \longrightarrow G \quad , \quad \mu' : G' \times G' \longrightarrow G'$$

とする。このとき、写像

$$f : G \longrightarrow G'$$

が準同型であるとは、 $\mu' \circ (f \times f) = f \circ \mu$ を満たすことである。

$$
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\mu"'] & G' \times G' \arrow[d, "\mu'"] \\
G \arrow[r, "f"'] & G'
\end{tikzcd}
$$

Definition 0.0.3

位相空間 X が位相群であるとは、X が群でありその structure map

$$\mu \ : \ X \times X \longrightarrow X \quad , \quad \nu \ : \ X \longrightarrow X$$

が連続であるときの事を示す。

では簡単に位相群の例を見てみよう。

Example 0.0.4

$\mathbf{R}$ において、

$$* = 0 \quad , \quad \mu(x, y) = x + y \quad , \quad \nu(x) = -x$$

とすれば、可換な位相群。

Example 0.0.5

$\mathbf{R}^{\times} = \mathbf{R} - \{0\}$ において、

$$* = 1 \quad , \quad \mu(x, y) = xy \quad , \quad \nu(x) = \frac{1}{x}$$

とすれば、可換な位相群。

Example 0.0.6

$\mathbf{C}$ において、

$$* = 0 \quad , \quad \mu(x, y) = x + y \quad , \quad \nu(x) = -x$$

とすれば、可換な位相群。

Example 0.0.7

$\mathbf{C}^\times = \mathbf{C} - \{0\}$ において、

$$* = 1 \quad , \quad \mu(x,y) = xy \quad , \quad \nu(x) = \frac{1}{x}$$

とすれば、可換な位相群。

この辺までは特に説明するまでも無いだろう。複素数の計算なども懐かしい気がする。ちなみに、あまり語られることは無いが、複素数の位相は $\mathbf{R}^2$ から誘導である。そして、演算の構造から考えると $(1,i)$ を基底とし、$\mathbf{R}$ で生成された自由アーベル群である。

$$\mathbf{C} = \{\ a + bi \mid a,b \in \mathbf{R}\ ,\ i^2 = -1\}$$

そこで今、これをさらに拡張して $(1,i,j,k)$ を基底とし、$\mathbf{R}$ で生成された自由アーベル群を考える。

Definition 0.0.8

$\mathbf{H}$ は、$(1,i,j,k)$ を基底とし、$\mathbf{R}$ で生成された自由アーベル群で、積を次で定義する
。

$$i^2 = -1 \quad , \quad j^2 = -1 \quad , \quad k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k \quad , \quad jk = -kj = i\ , \quad ki = -ik = j$$

このとき、$\mathbf{H}$ を Hamilton の四元数と呼ぶ。

無論 $\mathbf{H}$ の位相は $\mathbf{R}^4$から誘導される。

Proposition 0.0.9

$\mathbf{H}^\times = \mathbf{H} - \{0\}$ は上記の積で位相群となる。つまり、

$$* = 1\ ,\ \mu(x,y) = xy\ ,\ \nu(x) = \frac{1}{x}$$

とすれば、位相群である。

proof)　　単位元は 1 で確かめるまでもないだろう。よって、結合律と逆元存在を示していく。

とりあえず積を計算すると、恐ろしく長くなるのだが、

$(a+bi+cj+dk)(a'+b'i+c'j+d'k)$

$= aa' + ab'i + ac'j + ad'k + ba'i - bb' + bc'k + bd'j + ca'j + cb'k - cc' + cd'i + da'k + db'j + dc'i - dd'$

$= (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' + dc')i + (ac' + bd' + ca' + db')j + (ad' + bc' + cb' + da')k$

であるので、

$\{(a+bi+cj+dk)(a'+b'i+c'j+d'k)\}(a''+b''i+c''j+d''k)$

$= \{(aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' + dc')i + (ac' + bd' + ca' + db')j + (ad' + bc' + cb' + da')k\}(a''+b''i+c''j+d''k)$

$= (A+Bi+Cj+Dk)(a''+b''i+c''j+d''k)$

$= (Aa'' - Bb'' - Cc'' - Dd'') + (Ab'' + Ba'' + Cd'' + Dc'')i + (Ac'' + Bd'' + Ca'' + Db'')j + (Ad'' + Bc'' + Cb'' + Da'')k$

一方、

$(a+bi+cj+dk)\{(a'+b'i+c'j+d'k)(a''+b''i+c''j+d''k)\}$

$= (a+bi+cj+dk)\{(a'a'' - b'b'' - c'c'' - d'd'') + (a'b'' + b'a'' + c'd'' + d'c'')i + (a'c'' + b'd'' + c'a'' + d'b'')j + (a'd'' + b'c'' + c'b'' + d'a'')k\}$

$= (a+bi+cj+dk)\{A' + B'i + C'j + D'k\}$

$= (aA' - bB' - cC' - dD') + (aB' + bA' + cD' + dC')i + (aC' + bD' + cA' + dD')j + (aD' + bC' + cB' + dA')k$

これが等しいことを示すわけだが、全部見ていると面倒なので実数部分だけ代表して等しいことを示してみよう。

$(Aa'' - Bb'' - Cc'' - Dd'')$

$= (aa' - bb' - cc' - dd')a'' - (ab' + ba' + cd' + dc')b'' - (ac' + bd' + ca' + db')c'' - (ad' + bc' + cb' + da')d''$

$= a(a'a'' - b'b'' - c'c'' - d'd'') - b(b'a'' + a'b'' + d'c'' + c'd'') - c(c'a'' + d'b'' + a'c'' + b'd'') - d(d'a'' + c'b'' + b'c'' + a'd'')$

$= aA' - bB' - cC' - dD'$

面倒なので以下省略するが、他の部分も等しいことを確認して欲しい。これより、結合律は成立する。また、逆元の存在については、$\frac{1}{x} \in \mathbf{H}^{\times}$ を示せばよいわけである。ところで、 $a+bi+cj+dk \in \mathbf{H}$ に対し、

$$\overline{a+bi+cj+dk} = a-bi-cj-dk$$

で定義すると、

$$\begin{aligned}
&(a+bi+cj+dk)(\overline{a+bi+cj+dk}) \\
=&(a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk) \\
=&a^2-b^2-c^2-d^2
\end{aligned}$$

これを用いると、 $x \in \mathbf{H}^{\times}$ に対し、

$$\frac{1}{x} = \frac{\overline{x}}{x\overline{x}} \in \mathbf{H}^{\times}$$

となる。ちなみに $\mathbf{H}^{\times}$ が可換でないことは、$ij=-ji$ などから明らかである。 □

さて、ここまで来るとさらに考えたくなるのは、基底をさらに倍の 8 つに増やした自由アーベル群である。

Definition 0.0.10

$\mathbf{O}$ は、$(1,i,j,k,l,m,n,o)$ を基底とし、$\mathbf{R}$ で生成された自由アーベル群で、積を次で定義する。

	i	j	k	l	m	n	o
i	-1	l	o	$-j$	n	$-m$	$-k$
j	$-l$	-1	m	i	$-k$	o	$-n$
k	$-o$	$-m$	-1	n	j	$-l$	i
l	j	$-i$	$-n$	-1	o	k	$-m$
m	$-n$	k	$-j$	$-o$	-1	i	l
n	m	$-o$	l	$-k$	$-i$	-1	j
o	k	n	$-i$	m	$-l$	$-j$	-1

このとき、$\mathbf{O}$ を Kayleyの八元数と呼ぶ。当然位相は、$\mathbf{R}^8$からの誘導である。

Proposition 0.0.11

$\mathbf{O}^{\times} = \mathbf{O} - \{0\}$ は上記の積で位相群の条件の結合律以外は満たす。

proof)　単位元が 1 なのは、もういいだろう。そして、逆元も四元数の時と同様、$x \in \mathbf{O}^{\times}$ に対し、実数部分以外の符号を変えた $\overline{x} \in \mathbf{O}^{\times}$ が定義できて、$x\overline{x} \in \mathbf{R}$ となることを確認していただければ、逆元存在もよいだろう。そこで、結合律はどうなのかと見ていくと、例えば、

$$(ij)k = lk = -n \ \ , \ \ i(jk) = im = n$$

などを見ればわかる。　$\square$

8 元数のさらに 2 倍で 16 元数………というノリも良いんですが、ちょっと悪ノリしすぎです。オヤジでなくともチョイ悪です。確かに 16 元数もあるのですが、計算が半端なく大変になるので、この程度にしておきましょう。それよりも重要なのは、これらの部分群です。

Remmark 0.0.12

$\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{O}$ のそれぞれの単位球面 S^0 , S^1 , S^3 , S^7 を考えると、

S^0 , S^1 : は可換な位相群 , S^3 : 位相群 , S^7 : 結合律を満たさない

なぜ、群でもない S^7 まで同じくして扱うのかについては後ほど説明しますが、とりあえず、各球面が部分群であることを確認してください。懐かしく感じるのは $S^1 \subset \mathbf{C}$ なんかです。今では高校の数学Bから複素数平面が消えてしまったので、何も感じないかも知れませんが、複素数を極座標表示したとき、それらの積はそれら複素数の絶対値の積と、偏角の和で表せました。つまり、距離 1 である複素数に対しては、積をとっても半径 1 の円上を回転すると言うわけである。

Definition 0.0.13

X, Y : 位相群 に対し、

$$f \ : \ X \longrightarrow Y$$

が、位相空間の間の写像として連続かつ、群の間の写像として準同型であるとき、f を位相群の間の準同型と呼ぶ。

Definition 0.0.14

X, Y : 位相群 に対し、位相群の間の準同型

$$f : X \longrightarrow Y \quad , \quad g : Y \longrightarrow X$$

が、$g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$ を満たすとき、f, g を同型写像と呼び、これらが存在するとき、X, Y は位相群として同型と呼び、$X \cong Y$ と書く。

さて、位相群の例はこの当たりにして、次のような空間を考えましょう。

Definition 0.0.15

位相空間 X, Y に対し、

$$[X, Y] = \mathrm{Map}(X, Y)/\simeq$$

で定義し、また X, Y 基点つき空間に対し、

$$[X, Y]_* = \mathrm{Map}_*(X, Y)/\simeq$$

で、定義する。

単純に言えば、写像空間のホモトピー類であるが、無論 compact open topology を考えて、位相空間と見ている。これが位相群になる条件を次の章で考えるが、その前に色々準備をしておこう。

Lemma 0.0.16

位相空間 X, Y, Z と、$f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$f_* : [Z, X] \longrightarrow [Z, Y]$$

を、$[g] \in [Z, X]$ に対し、$f_*[g] = [f \circ g]$ で定義すると、これは well definded かつ連続。

proof) $[g], [h] \in [Z, X]$ に対し、$[g] = [h]$ とすると、$g \simeq h$ であり、

$$H : Z \times I \longrightarrow X$$

をその homotopy とすると、$H(z,0)=g(z)$, $H(z,1)=h(z)$。ここで、

$$f \circ H \ : \ Z \times I \longrightarrow Y$$

とおくと、これにより、$f \circ g \simeq f \circ h$ である。

$$\therefore \qquad f_*[g] = f_*[h]$$

これで well definded は示した。続いて連続性を示す。

$$f_* \ : \ [Z,X] \longrightarrow [Z,Y]$$

は、

$$\tilde{f} \ : \ \mathrm{Map}(Z,X) \longrightarrow \mathrm{Map}(Z,Y) \quad \tilde{f}(g) = f \circ g$$

からの誘導であるので、$\tilde{f}$ の連続を示せばよい。

$$W(K,U) \ : \ \text{open in } \mathrm{Map}(Z,Y) \text{ とすれば、}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{-1}(W(K,U)) &= \{ \ g \in \mathrm{Map}(Z,X) \mid \tilde{f}(g) \in W(K,U) \ \} \\ &= \{ \ g \in \mathrm{Map}(Z,X) \mid f \circ g \in W(K,U) \ \} \\ &= \{ \ g \in \mathrm{Map}(Z,X) \mid f \circ g(K) \subset U \ \} \end{aligned}$$

よって、$W(K, f^{-1}(U))$ が、g の$\tilde{f}^{-1}(W(K,U))$ 内での開近傍である。これにより、$\tilde{f}$ は連続であり、f_* も連続である。 □

Lemma 0.0.17

位相空間 X,Y,Z,W と、$f \ : \ X \longrightarrow Y$, $g \ : \ Y \longrightarrow Z$ に対し、

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \ : \ [W,X] \longrightarrow [W,Z]$$

proof) $[h] \in [W,X]$ とすると、

$$(g \circ f)_*[h] = [g \circ f \circ h] = g_*[f \circ h] = g_* \circ f_*[h]$$

$\therefore \qquad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ □

Lemma 0.0.18

位相空間 X, Y と、$1_Y : Y \longrightarrow Y$ に対し、

$$(1_Y)_* = 1_{[X,Y]} : [X, Y] \longrightarrow [X, Y]$$

proof)　$[f] \in [X, Y]$ に対し、

$$(1_Y)_*[f] = [1_Y \circ f] = [f]$$

$\therefore$　$(1_Y)_* = 1_{[X,Y]}$　$\square$

Lemma 0.0.19

位相空間 X, Y, Z と、$f, g : X \longrightarrow Y$ に対し、$f \simeq g$ ならば、

$$f_* = g_* : [Z, X] \longrightarrow [Z, Y]$$

である。

proof)　$[h] \in [Z, X]$ に対し、$f \circ h \simeq g \circ h$ なので、

$$f_*[h] = [f \circ h] = [g \circ h] = g_*[h]$$

$\therefore$　$f_* = g_*$　$\square$

Corollary 0.0.20

位相空間 X, Y, Z と、$f : X \longrightarrow Y$　homotopy equivalence に対し、

$$f_* : [Z, X] \longrightarrow [Z, Y] \quad \text{同相}$$

proof)　上の lemma を総合すると導かれる。　$\square$

Remmark 0.0.21

上記の命題や定理はすべて基点付きでも成り立つ。つまり、基点つき空間、基点を保つ写像、基点を保つ homotopy などに言葉を変えればよい。