0.1 Loop Sum

Lemma 0.1.1

位相空間 X, Y に対し、$[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega Y]$ である。

proof) 今までの議論から、

$$[\Sigma X, Y] \cong [X \wedge S^1, Y] \cong [X, \mathrm{Map}(S^1, Y)] \cong [X, \Omega Y]$$

である。ちなみに具体的な同型写像 $f(x \wedge t) \mapsto f(x)(t)$ で与えられる。

Corollary 0.1.2

位相空間 X, Y に対し、$[\Sigma^n X, Y] \cong [X, \Omega^n Y]$ である。

Definition 0.1.3

位相空間 X に対し、$[\Sigma X, \Sigma X]$, $[\Omega X, \Omega X]$ を考えると、それぞれの恒等射の随伴を考えれば、

$$\eta : X \longrightarrow \Omega\Sigma X \ , \ \varepsilon : \Sigma\Omega X \longrightarrow X$$

がそれぞれ定義できる。具体的な写像の構成は、

$$\eta(x)(t) = x \wedge t \ , \ \varepsilon(\alpha \wedge t) = \alpha(t)$$

となる。これを unit,counit 写像と呼ぶ。

Proposition 0.1.4

位相空間 X に対し、ΩX に関する unit と X に関する counit の loop、

$$\eta : \Omega X \longrightarrow \Omega\Sigma\Omega X \ , \ \Omega(\varepsilon) : \Omega\Sigma\Omega X \longrightarrow \Omega X$$

を考えたとき、これらの合成は ΩX 上の恒等射に等しい。

proof) unit,counit の定義から、$x \in \Omega X$ に対し、

$$\Omega(\varepsilon) \circ \eta(x)(t) = \varepsilon \circ \eta(x)(t) = \varepsilon(x \wedge t) = x(t)$$

となるため。

$\square$

Definition 0.1.5

$f : X \longrightarrow Y$ に対し、unit,counit 写像と同じように

$$\eta : F_f \longrightarrow \Omega C_f\ ,\ \varepsilon : \Sigma F_f \longrightarrow C_f$$

を次のように、

$$\eta(x,\alpha)(t) = \varepsilon(x,\alpha,t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ (x, 2t-1) & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

で定義する。ηはε の随伴である。

Theorem 0.1.6

$f : X \longrightarrow Y$ に対し、次の図式は homotopy 可換である。

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma\Omega F_f \arrow[r, "\Sigma\Omega p"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \Sigma\Omega X \arrow[r, "\Sigma\Omega f"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \Sigma\Omega Y \arrow[r, "\Sigma\iota"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \Sigma F_f \arrow[r, "\Sigma p"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \Sigma X \arrow[d, "="] \\
\Omega Y \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "="'] & F_f \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\eta"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\eta"'] & C_f \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\eta"'] & \Sigma X \\
\Omega Y \arrow[r, "\Omega i"'] & \Omega C_f \arrow[r, "\Omega\pi"'] & \Omega\Sigma X \arrow[r, "\Omega\Sigma f"'] & \Omega\Sigma Y \arrow[r, "\Omega\Sigma i"'] & \Omega\Sigma C_f &
\end{tikzcd}$$

ただし、上横列は homotopy fiber sequence で suspension を取ったものであり、下横列は homotopy cofiber sequence で loop を取ったものである。

proof)　　unit,counit の定義から左上２つと、右下２つが可換になることは簡単にわかる。