基本群と被覆空間

ホモトピー群は高次元になればなるほど、その計算が尋常なく難しくなることが知られている。まずは低次元を計算し、それを高次に応用する手法がとられる。$n=0$ の場合は弧状連結成分ということなので、次は $n=1$ の場合を調べたい。$n=1$ の場合のホモトピー群は基本群と呼ばれ、それを計算する上で重要なのが被覆空間という概念である。

1　被覆空間

ホモトピー群で求めやすいのは簡単な空間の直積になっている空間である。このように 2 つの空間の直積の概念の一般的なものとして、被覆空間が位置している。

定義 1.1. E を空間、B を弧状連結な空間とする。$p: E \longrightarrow B$ 被覆空間とは、任意の $x \in B$ x の開近傍 U が存在し、次の局所自明条件を満たす。

- $p^{-1}(x)$ が離散空間（集合）であり、同相写像 $h: U \times p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(U)$ が、$p \circ h = \mathrm{pr}_1$ となるように存在する。ただし、$\mathrm{pr}_1: U \times p^{-1}(x) \longrightarrow U$ は第一成分への射影である。

$p: E \longrightarrow B$ が被覆空間のとき、E を全空間、B を底空間、$F = p^{-1}(x)$ を x 上のファイバー、p を射影、h を局所自明化写像とそれぞれ呼ぶ。

例 1.2. B を弧状連結な空間、F を離散空間とし、$E = B \times F$、$p: E \longrightarrow B$ を第一成分への射影とすればこれは被覆空間である。また、これを自明な被覆空間と呼ぶ。

証明 $x \in B$ に対し、B 自身を開近傍として考える。$p^{-1}(x) = F$, $p^{-1}(B) = B \times F$ なので、局所自明化写像として恒等写像を考えればよい。 □

例 1.3. $p: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ を、$p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定義すると、これは被覆空間である。

証明 $(x_0, y_0) \in S^1$ をとる。p は $\mathbb{R}$ を長さ 1 ごとに円周上に巻きつける写像なので、$p^{-1}(x_0, y_0) = \mathbb{Z}$ である。また、p が全射なので、$p(t_0) = (x_0, y_0)$ となる $t_0 \in \mathbb{R}$ と、$0 < \varepsilon < 1/2$ をとり、

$$U = \{(\cos 2\pi(t_0 + s), \sin 2\pi(t_0 + s)) \mid -\varepsilon < s < \varepsilon\}$$

とおくと、これは (x_0, y_0) の開近傍。

$$p^{-1}(U) = \{t_0 + s + n \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon < s < \varepsilon, n \in \mathbb{Z}\}$$

であるため、局所自明化写像が、$U \times \mathbb{Z} \longrightarrow p^{-1}(U)$ が、

$$((\cos 2\pi(t_0 + s), \sin 2\pi(t_0 + s)), n) \mapsto t_0 + s + n$$

により与えられる。 □

例 1.4. 射影 $p: S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ は被覆空間である。

証明 $[x] \in \mathbb{R}P^n$ に対し、$p^{-1}[x] = \{x, -x\} = \mathbb{Z}_2$ である。よって、$x \in U$ を十分小さい $\varepsilon > 0$ における x の ε 近傍とすると、$-U = \{-x \in S^n \mid x \in U\}$ は $-x$ の開近傍である。また、$p(U)$ は $[x]$ の開近傍であり、$p^{-1}(p(U)) = U \cup (-U)$ であるため、局所自明化として、

$$p(U) \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow U \cup (-U)$$

は、$p(U) \cong U$ であることから誘導される。 □

さて、被覆空間を考えると道、あるいはホモトピーの持ち上げといった事ができる。

定理 1.5. $p : E \longrightarrow B$ を被覆空間、$\gamma : I \longrightarrow B$、$e \in E$ に対し、$p(e) = \gamma(0)$ とする。このとき、$\tilde{\gamma} : I \longrightarrow E$ で、$p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, $\tilde{\gamma}(a) = e$ を満たすものが一意に存在する。言い換えれば、これは次の可換図式で斜め向きの写像が一意的に存在するということである。

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "e"] \arrow[d, "0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\gamma}"] & B \end{tikzcd}$$

証明 被覆空間の定義より、任意の $t \in I$ に対し、$\gamma(t) \in U_t \subset B$ となる開近傍、そして局所自明化写像

$$h_t : U_t \times F \longrightarrow p^{-1}(U_t)$$

が存在する。これより、$\gamma(I) \subset \bigcup_{t \in I} U_t$ である。このとき、I がコンパクト、よって $\gamma(I)$ がコンパクトなので、有限個の開被覆が選べるので、

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

が存在し、$\gamma([a, b]) \subset \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} U_{t_i}$ である。ホモロジー群での重心細分を思い出せば、ルベーグの補題から $[0, 1]$ の細分をさらに細かくして、

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$$

が存在し、任意の j に対し、ある i において、$\gamma([s_j, s_{j+1}]) \subset U_{t_i}$ となる。あとは局所自明化を使って持ち上げる。つまり、$\gamma([s_0, s_1]) \subset U_{t_i}$ であるが、今、$\gamma(s_0) = \gamma(0) = p(e)$ だったので、$e \in p^{-1}(U_{t_i})$ である。これより、$h_t(p(e), e') = e$ となる $e' \in F$ が決まるが、

$$\tilde{\gamma}_1 : [s_0, s_1] \longrightarrow p^{-1}(U_{t_i}) \subset E$$

を、$h_{t_i}(-, e') \circ \gamma$ により定義する。これは、局所自明化の条件から、$p(\tilde{\gamma}_1) = \gamma$, $\tilde{\gamma}_1(s_0) = e$ を満たす一意的な写像である。あとは帰納的に、

$$\tilde{\gamma}_2 : [s_1, s_2] \longrightarrow E$$

を、$p \circ \tilde{\gamma}_2 = \gamma$, $\tilde{\gamma}_2(s_1) = \tilde{\gamma}_1(s_1)$ を満たすように一意的に構成し、これを続け、

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2 * \cdots * \tilde{\gamma}_n$$

とつなげればよい。 □

系 1.6. $p : E \longrightarrow B$ を被覆空間、$\gamma, \delta : I \longrightarrow B$ に対し、　$H : I \times I \longrightarrow B$ を γ と δ を繋ぐホモトピーとし、$e, e' \in E$ に対し、$H(0, s) = \gamma(0) = \delta(0) = p(e)$, $H(1, s) = \gamma(1) = \delta(1) = p(e')$ となるとする。ならば、これらの持ち上げ $\tilde{\gamma}, \tilde{\delta} : I \longrightarrow E$ は、ホモトピックであり、$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\delta}(0) = e$, $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\delta}(1) = e'$ である。

証明 道の持ち上げとほぼ同様である。$H(t, s) \in U_{t,s} \subset B$ という開近傍を考え、$H(I \times I) \subset \bigcup_{t,s \in I} U_{t,s}$ で、コンパクト性から有限個の開被覆が選べる。さらに $I \times I$ の細分を細かくして、

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1, \ 0 = s_0 < s_1 < \cdots s_n = 1$$

をとり、$H([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) \subset U_{t,s}$ となるようにする。あとは各長方形ごと局所自明化写像を用いて持ち上げていけば、求めるホモトピーを得る。 □

定理 1.7. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ である。

証明 $e_0 = (1,0) \in S^1$ を基点とする。

$$f : \pi_1(S^1, e_0) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

$[\gamma] \in \pi_1(S^1, e_0)$ とすると、$\gamma : I \longrightarrow S^1$, $\gamma(0) = \gamma(1) = e_0$ である。ここで、被覆空間

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ を考えると、道の持ち上げができて、

$$\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

で、$p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, $\tilde{\gamma}(0) = 0$ となるものが一意に存在する。今、$\tilde{\gamma}(1)$ を考えると、

$$p\left(\tilde{\gamma}(1)\right) = (\cos 2\pi\tilde{\gamma}, \sin 2\pi\tilde{\gamma}(1)) = (1,0)$$

なので、$\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$ である。よって、$f([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1)$ と定義する。$\tilde{\gamma}$ の一意性とホモトピーの持ち上げから、これは矛盾無く定義できている。また、$[\gamma], [\delta] \in \pi_1(S^1, e_0)$ に対し、$\gamma * \delta$ のもちあげを考えると、$\tilde{\gamma} * \tilde{\delta}$ になる。よって、

$$f([\gamma] \cdot [\delta]) = (\tilde{\gamma} * \tilde{\delta})(1) = \tilde{\gamma}(1) + \tilde{\delta}(1)$$

であることが、道を繋ぐ際の始点の移動を考えると成り立つことがわかる。よって、f は準同型である。残るは全単射であるが、まず、$n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\gamma(t) = (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt)$ で定義すれば、$\tilde{\gamma}(t) = nt$ がその持ち上げであるため、$\tilde{\gamma}(1) = n$ であり、$f[\gamma] = n$ なので全射であることがわかる。あとは、$f([\gamma]) = 0$ とすると、$\tilde{\gamma}(1) = 0$ である。しかし、$\tilde{\gamma}(0) = 0$ でもあったので、$\tilde{\gamma} \in \pi_1(\mathbb{R}, 0)$ であるが、$\mathbb{R}$ は可縮なので、$[\tilde{\gamma}] = 0$ である。よって、

$$[\gamma] = p_*[\tilde{\gamma}] = 0$$

となる。 □

また、上記の証明を見れば、その生成元が恒等写像のホモトピー類であることがわかる。

2 普遍被覆

まず、被覆空間から新たな被覆空間を構成する方法として、引き戻しという手法がある。

定義 2.1. $p : E \longrightarrow B$ を連続写像、また $f : X \longrightarrow B$ を連続写像とする。このとき、p の f による引き戻しとは、

$$E \times_B X = \{(e,x) \in E \times X \mid p(e) = f(x)\}$$

とおいたとき、$q : E \times_B X \longrightarrow X$, $(e,x) \mapsto x$ で与えられる写像である。このとき、$g : E \times_B X \longrightarrow E$, $(e,x) \mapsto e$ で与えると、

$$\begin{tikzcd}
E \times_B X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

の図式は可換である。

実は引き戻しというのは、上記の図式で特徴付けられる。

補題 2.2. 次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

このとき、$\varphi : Y \longrightarrow E \times_B X$ で、$q \circ \varphi = r$, $g \circ \varphi = h$ となる写像が一意に存在する。

証明 $\varphi : Y \longrightarrow E \times_B X$ を、$y \mapsto (r(y), f(y))$ により定義すると、$q \circ \varphi = r$, $g \circ \varphi = h$ を満たす。また、$\psi : Y \longrightarrow E \times_B X$ が、$q \circ \varphi = r$, $g \circ \varphi = h$ を満たすとすると、

$$\psi(y) = (q(\psi(y)), g(\psi(y))) = (r(y), f(y)) = \varphi(y)$$

となるため一意性も満たす。 □

命題 2.3. $p : E \longrightarrow B$ を被覆空間、$f : X \longrightarrow B$ を連続写像とする。このとき、p の f による引き戻し、$q : E \times_B X \longrightarrow X$ も被覆空間である。

Proof. まず、$x \in X$ に対し、$p^{-1}(f(x)) = \{e \in E \mid p(e) = f(x)\} \cong q^{-1}(x)$ であるため、各ファイバーは同一視してよい。$f(x) \in U \subset B$ の開近傍で、$h : U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$ を局所自明化写像とする。このとき、$x \in f^{-1}(U) \subset X$ が開近傍として取れて、

$$\overline{h} : f^{-1}(U) \times F \longrightarrow q^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ q)^{-1}(U) = (p \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(p^{-1}(U)) = p^{-1}(U) \times_B X$$

は、$(y, a) \mapsto (h(f(y), a), y)$ により与えれば、これが局所自明化写像である。 □

このように被覆空間は底空間への連続写像があればどんどん新しい被覆空間を構成できる。実はすべての被覆空間は、普遍被覆とよばれるある特別な被覆空間を引き戻して構成されることが知られている。詳しくは被覆空間より一般的なファイバー束で考えるとして、ここでは普遍被覆と基本群の関係について考える。

定義 2.4. $p : E \longrightarrow B$ を被覆空間、$\pi_0(E) = *$, $\pi_1(E) = *$ を満たすとき、これを普遍被覆と呼ぶ。

普遍と名づけられている理由は以下の性質を持つからである。

命題 2.5. $p : E \longrightarrow B$ を普遍被覆、$p' : E' \longrightarrow B$ を被覆空間とする。$b \in B$ を固定し、$e \in E$, $e' \in E'$ に対し、$p(e) = p'(e') = b$ とする。このとき、$f : E \longrightarrow E'$ で $p' \circ f = p$, $f(e) = e'$ となる写像が一意的に存在する。

証明 $x \in E$ に対し、E が弧状連結より、$\gamma : I \longrightarrow E$ で、$\gamma(0) = e$, $\gamma(1) = x$ となるものが存在する。$p \circ \gamma$ を p' を用いて持ち上げると、$\widetilde{p \circ \gamma} : I \longrightarrow E'$ で、$\widetilde{p \circ \gamma} = e'$ となるものが存在する。このとき、$f(x) = \widetilde{p \circ \gamma}(1)$ により定義する。このとき注意したいのは、f は γ の選び方によらないことである。これは、$\delta : I \longrightarrow E$ で $\delta(0) = e$, $\delta(1) = x$ となる道をもうひとつ考えると、$\gamma * \overline{\delta}$ はループである。ただし、$\overline{\delta}$ は δ の逆道である。つまり、$[\gamma] \cdot [\delta]^{-1} \in \pi_1(E, e)$ だが、$\pi(E, e) = *$ なので、$[\gamma] = [\delta]$、$\gamma \simeq \delta$ となり、$p \circ \gamma \simeq p \circ \delta$ である。ホモトピーの持ち上げを用いれば、$\tilde{\gamma} \simeq \tilde{\delta}$ で終点も一致しているので、$\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\delta}(1)$ である。これは $p' \circ f = p$ で、$p(e) = e'$ は $\gamma = c_e$ という定値写像で考えれば導かれる。

また、一意性であるが、$g : E \longrightarrow E'$ が $p' \circ g = p$, $g(e) = e'$ を満たすとする。$x \in E$ に対し、$\gamma : I \longrightarrow E$, $\gamma(0) = e$, $\gamma(1) = x$ となる道を考えるが、$g \circ \gamma : I \longrightarrow E'$ を考えると、$g \circ \gamma(0) = b$, $p' \circ g \circ \gamma = p \circ \gamma$ となるため、持ち上げの一意性から、$\widetilde{p \circ \gamma} = g \circ \gamma$ である。よって、

$$g(x) = g \circ \gamma(1) = \widetilde{p \circ \gamma}(1) = f(x)$$

となる。 □

ある程度よい性質を満たす空間ならば、それを底空間に持つ普遍被覆が構成できる。

定理 2.6. B が連結かつ、局所半 1-連結であるとする。このとき、B 上の普遍被覆が存在する。

証明 簡単な構成だけ紹介する。$b \in B$ を基点とする。このとき、

$$\pi(B; b, a) = \{\gamma : I \longrightarrow B \mid \gamma(0) = b, \gamma(1) = a\}$$

という集合とする。$\pi(B, b) = \bigcup_{a \in B} \pi(B; , b, a)$ で定義し、このとき、B の開集合 U と、$[\gamma] \in \pi(B; b, a)$, $a \in U$ に対し、

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma] * [\delta] \mid [\delta] \in \pi(U; a)\} \subset \pi(B, b)$$

と定義し、$\{U_{[\gamma]}\}$ を開基として、$E = \pi(B, b)$ に位相を入れる。$p : E \longrightarrow B$ を、$\gamma \mapsto \gamma(1)$ により定義すると、これが普遍被覆である。 □

上記の局所半 1-連結などという条件はこの被覆空間を扱う場面でしか見たことが無いが、例えば CW 複体などは条件を満たす。

命題 2.7. $p : E \longrightarrow B$ を普遍被覆とし、$e \in E$、$b = p(e) \in B$ とする。このとき、

$$\mathrm{Aut}(E) = \{f : E \xrightarrow{\cong} E \mid p \circ f = p\}$$

は、$\pi_1(B, b)$ と同型である。

証明 $\varphi : \mathrm{Aut}(E) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ は次のように定義する。$f \in \mathrm{Aut}(E)$ に対し、$\gamma : I \longrightarrow E$ を $\gamma(0) = e$, $\gamma(1) = f(e)$ を取ると、$[p \circ \gamma] \in \pi_1(B, b)$ である。$\varphi(f) = [p \circ \gamma]$ とする。E が単連結であるから、これは γ の取り方によらない。道の合成を考えると、これが準同型であることもわかる。あとは全単射であるが、$[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ に対し、その持ち上げを考えると、$\tilde{\gamma} : I \longrightarrow E$ で、$\tilde{\gamma}(0) = e$ を得る。このとき、命題 2.5 により、$f : E \longrightarrow E$ で、$p \circ f = p$, $f(e) = \tilde{\gamma}(1)$ を満たす写像を得る。普遍被覆であることから、これは同型であり、$f \in \mathrm{Aut}(E)$ で、$\varphi(f) = [\gamma]$ である。また、$\varphi(f) = [e_b] \in \pi_1(B, b)$ とすると、$\varphi(f) \simeq e_b$ であるから、γ はループとなる。つまり、$\gamma(0) = \gamma(1)$ である。よって、$f(e) = e$ となり、f の存在の一意性から、$f = 1_E$ であることがわかる。 □

命題 2.8. $p : E \longrightarrow B$ を被覆空間とするとき、ここから誘導される写像

$$p_* : \pi_1(E, e) \longrightarrow \pi_1(B, b)$$

は単射である。

証明 $p_*[\gamma] = 1 \in \pi_1(B, b)$ とする。このとき、$p \circ \gamma \simeq e_b$ という定値写像にホモトピックである。ホモトピーの持ち上げを考えれば、$\gamma \simeq e_e$ である。 □

最後にガロア理論との対応だが、B 上の被覆空間というのは、$\pi_1(B)$ の部分群により分類される。これは B 上の普遍被覆が $\{e\} \in \pi_1(B)$ という自明な部分群、$B = B$ という自明な被覆空間が、$\pi_1(B)$ 自身という部分群が対応し、その間も部分群の大きさによって順次対応づいているというわけである。

定理 2.9. 基点付空間 (B, b) 上の被覆空間の同型類 $\mathrm{Cov}_*(B)$ と $\pi_1(B, b)$ の部分群の集合 $O(\pi_1(B))$ の間に全単射が存在する。

証明 $(p : E \longrightarrow B) \in \mathrm{Cov}_*(B)$ を取ったとき、$p_* : \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(B)$ を考え、このイメージを対応させる。逆対応は以下のように与える。$G \subset \pi_1(B, b)$ に対し、

$$G \times E \longrightarrow E$$

を、$([\gamma], e) \mapsto \widetilde{\alpha * \gamma}(1)$ で作用を与える。ただし、$\alpha : I \longrightarrow B$, $\alpha(0) = b$, $\alpha(1) = p(e)$ である。このとき、p から誘導される $\tilde{p} : E/G \longrightarrow B$ が被覆空間として構成される。これが逆対応である。 □