ホモトピー群

トポロジーで重要な不変量として、ホモロジー群と並んでホモトピー群が上げられる。一般的にはホモトピー群のほうが定義が明瞭で理解しやすいのだが、実際に求めるのは難しい。最も基本的な空間といえる球面ですら、高次元ではまだわかっていない。

1　ホモトピー群

ホモトピー群は写像のホモトピー類によって定義されるが、通常は球面からの写像で考えるが、ディスクからの写像で境界が一点につぶれるものと考えてもよいし、群構造を定義する際にはディスクをキューブで考えるとわかりやすい。

定義 1.1. (X, x_0) を基点つき空間、$n \geqq 0$ とする。

$$\pi_n(X, x_0) = \{f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)\}/\simeq$$

により定義する。ただし、$\partial I^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I^n \mid x_i \in \{0,1\} \text{ for some } i\}$ が境界である。また、$n \geqq 1$ に対し、$\pi_n(X, x_0)$ の群構造は以下で定義する。$f, g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ に対し、

$$f * g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$$

を次で定義する。

$$f * g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \cdots, x_n) & 0 \leqq x_1 \leqq 1/2 \\ g(2x_1 - 1, x_2, \cdots, x_n) & 1/2 \leqq x_1 \leqq 1 \end{cases}$$

これにより、ホモトピー群の積

$$\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$$

は、$([f], [g]) \mapsto [f * g]$ により定義する。これが矛盾無く定義されていることは次で示す。

補題 1.2. $n \geqq 1$ において、$\pi_n(X, x_0)$ は上記の積で群となる。

証明

1. まず、対応が矛盾無く定義されているか見る。つまり、$f \simeq f'$, $g \simeq g'$ に対し、$f * g \simeq f' * g'$ を示せばよい。f, f' を繋ぐホモトピーを H, g, g' を繋ぐホモトピーを F とおけば、$H * F$ が $f * g, f' * g'$ を繋ぐホモトピーである。

2. 積の結合則を確かめる。$f, g, h : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ に対し、$f * (g * h) \simeq (f * g) * h$ を示せばよい。それぞれ求めると、

$$f * (g * h)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \cdots, x_n) & 0 \leqq x_1 \leqq 1/2 \\ g(4x_1 - 2, x_2, \cdots, x_n) & 1/2 \leqq x_1 \leqq 3/4 \\ h(4x_1 - 3, x_2, \cdots, x_n) & 3/4 \leqq x_1 \leqq 1 \end{cases}$$

   同様にして、

$$(f * g) * h)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} f(4x_1, x_2, \cdots, x_n) & 0 \leqq x_1 \leqq 1/4 \\ g(4x_1 - 1, x_2, \cdots, x_n) & 1/4 \leqq x_1 \leqq 1/2 \\ h(2x_1 - 1, x_2, \cdots, x_n) & 1/2 \leqq x_1 \leqq 1 \end{cases}$$

パラメーターを調節するホモトピーを選べばいいので、$H : I^n \times I \longrightarrow X$ を、

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = \begin{cases} f(4x_1/(1+t), x_2, \cdots, x_n) & 0 \leqq x_1 \leqq (1+t)/4 \\ g(4x_1 - 1 - t, x_2, \cdots, x_n) & (1+t)/4 \leqq x_1 \leqq (2+t)/4 \\ h(4(x_1 - 1)/(2-t), x_2, \cdots, x_n) & (2+t)/4 \leqq x_1 \leqq 1 \end{cases}$$

とすれば、これが $(f * g) * h$ と $f * (g * h)$ を繋ぐホモトピーである。

3. 次に単位元であるが、これは x_0 への定置写像 $e_{x_0} : I^n \longrightarrow X, \mathbf{v} \mapsto x_0$ である。実際、

$$e_{x_0} * f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} x_0 & 0 \leqq x_1 \leqq 1/2 \\ f(2x_1 - 1, x_2, \cdots, x_n) & 1/2 \leqq x_1 \leqq 1 \end{cases}$$

であるため、

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = \begin{cases} x_0 & 0 \leqq x_1 \leqq (1-t)/2 \\ f((2x_1 + t - 1)/(1+t), x_2, \cdots, x_n) & (1-t)/2 \leqq x_1 \leqq 1 \end{cases}$$

によって与えるとこのホモトピーにより、$e_{x_0} * f \simeq f$ であることがわかる。逆も同じである。

4. 最後に逆元は、$[f] \in \pi_n(X, x_0)$ に対し、$g : I^n \longrightarrow X$ を、$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(1 - x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で与えれば、$[g]$ が $[f]$ の逆元である。実際、

$$f * g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \cdots, x_n) & 0 \leqq x_1 \leqq 1/2 \\ f(2 - 2x_1, x_2, \cdots, x_n) & 1/2 \leqq x_1 \leqq 1 \end{cases}$$

なので、

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = \begin{cases} f((t - 1 + 2x_1)/(1+t), x_2, \cdots, x_n) & 0 \leqq x_1 \leqq (1-t)/2 \\ x_0 & (1-t)/2 \leqq x_1 \leqq (1+t)/2 \\ f(2(t + 1 - x_1)/(1+t), x_2, \cdots, x_n) & (1+t)/2 \leqq x_1 \leqq 1 \end{cases}$$

により与えれば、$f * g \simeq e_{x_0}$ であることが従う。逆も同じである。

□

命題 1.3. $\pi_n(X, x_0)$ は、$n \geqq 2$ においてアーベル群である。

証明 $(I^n, \partial I^n) \cong (D^n, S^{n-1})$ なので、

$$h_t : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (D^n, S^{n-1})$$

を $e_+^0 = (1, 0, \cdots, 0)$ と $e_-^0 = (-1, 0, \cdots, 0)$ を結ぶ線を軸とした πt の回転とする。これより、π 回転する写像と恒等射がホモトピー同値である。

$$(I^n, \partial I^n) \cong (D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{h_t} (D^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n) \xrightarrow{f*g} (X, x_0)$$

を考えれば、$f * g \simeq g * f$ である。 □

$n = 1$ では示せない理由は、上の証明における回転の写像が、D^1 内で動けないからである。

定義 1.4. $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ を基点を保つ写像とすると、準同型

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

が、$[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ により定義される。これを f から誘導されたホモトピー群間の写像と呼ぶ。

注意 1.5. π_* は基点つき空間から群の圏への共変関手である。

命題 1.6. $f, g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ がホモトピックならば、$f_* = g_* : \pi_*(X, x_0) \longrightarrow \pi_*(Y, y_0)$ である。

証明 $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$ に対し、$f \circ \alpha \simeq g \circ \alpha$ なので、$[f \circ \alpha] = [g \circ \alpha]$、つまり、 $f_*[\alpha] = g_*[\alpha]$ である。 □

系 1.7. $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ ならば、$\pi_*(X, x_0) \cong \pi_*(Y, y_0)$ である。

命題 1.8. $X = \{x_0\}$ のとき、$\pi_*(X, x_0) = *$ である。

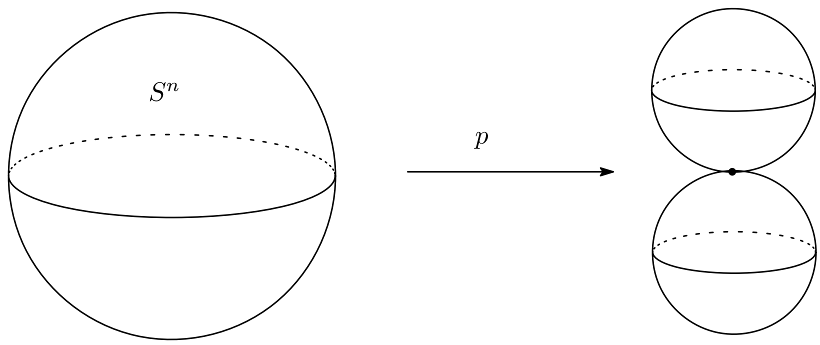
証明 $(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ は定値写像以外ないからである。 □

注意 1.9. $\pi_n(X, x_0)$ はキューブから X の写像で、境界がつぶれるものであった。ならば、はじめから境界を潰したところからの写像と考えても同じである。つまり、球面からの写像と考えてもいいわけである。

$$\pi_n(X, x_0) \cong \{f : (S^n, *) \longrightarrow (X, x_0)\}/\simeq$$

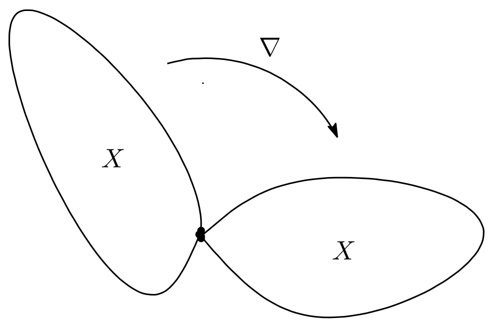
となる。このとき積構造は以下のように考えることができる。まずは球面の赤道を潰す写像、

$$p : S^n \longrightarrow S^n/S^{n-1} \cong S^n \vee S^n$$



と、そして空間を折りたたむ写像、

$$\nabla : X \vee X \longrightarrow X$$



に対し、$([f], [g]) \mapsto [\nabla \circ (f \vee g) \circ p]$ を対応させるものである。この見方については (co)H-space の場合で詳しく解説する。

さて、ホモトピー群とホモロジー群は非常によく似ている。同じ空間から次数付の群への関手で、ホモトピー不変性を持ち、ホモロジー群は単体から、ホモトピー群は球面からの写像を元に構成されている。しかし、無論違うところもある。今まで見てきたところで言うと、ホモロジー群はすべてアーベル群だが、ホモトピー群は 1-次元では一般的に可換ではなく、0-次元では群でもない。$\pi_0(X, x_0)$ の元は弧状連結成分を表している。

命題 1.10. $\pi_0(X, x_0)$ と弧状連結成分 S の集合の間に全単射が存在する。

証明 $\pi_0(X, x_0) \longrightarrow S$ を以下のように定義する。$[\alpha] \in \pi_0(X, x_0)$ を取ると、$\alpha : S^0 \longrightarrow X$ であり、$\alpha(1) = x_0$ となる。よって、$[\alpha] \mapsto [\alpha(-1)]$ と、$\alpha(-1) \in X$ を含む弧状連結成分を対応させる。このとき、弧状連結成分の同値関係と π_0 の同値関係を考えれば、全単射であることは容易に示される。 □

一般に基点が異なれば $\pi_n(X,x_0)$ は同型になるとは限らないが、$\pi_0(X,x_0)$ は、基点の取り方によらない。よって、$n=0$ の時は、$\pi_0(X)$ とかく。また、上記の命題により、$\pi_0(X)=*$ であることと X が弧状連結であることは同値であるが、この場合には高い次元においても、$\pi_n(X,x_0)$ は基点の取り方によらないので、この場合には $\pi_n(X)$ とかく。あるいは、基点が明らかな場合にもそういった記述をする場合がある。

命題 1.11. X が弧状連結のとき、$\pi_n(X,x_0)$ は基点の取り方によらない。

証明 別の基点 $y_0 \in X$ に対し、$\pi_n(X,x_0) \cong \pi_n(X,y_0)$ を示せばよい。仮定より、$\alpha : [-1,1] \longrightarrow X$ を $\alpha(-1)=x_0, \alpha(1)=y_0$ を満たす連続写像が存在する。$p : S^n \longrightarrow [-1,1]$ を基点が属する軸への射影とし、$q : S^n \longrightarrow S^n \vee S^n$ を基点を含まない赤道の押しつぶしとしたとき、$[f] \in \pi_n(X,x_0)$ に対し、

$$g : S^n \xrightarrow{q} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee \alpha \circ p} X \vee X \overrightarrow{\nabla} X$$

が定義できるが、$[g] \in \pi_n(X,y_0)$ であり、$[f] \mapsto [g]$ により同型対応が作れる。 □

ホモロジー群が直和に対して可換性があったのに対し、直積と相性がよい。

命題 1.12. $(X,x_0),(Y,y_0)$ を基点つき空間とする。このとき、射影 $p_X : X \times Y \longrightarrow X, p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ から誘導される写像、

$$p : \pi_*(X \times Y,(x_0,y_0)) \longrightarrow \pi_*(X,x_0) \times \pi_*(Y,y_0)$$

$[f] \mapsto ((p_X)_*[f],(p_Y)_*[f])$ は同型である。

証明 まずは全射を示す。$([f],[g]) \in \pi_n(X,x_0) \times \pi_n(Y,y_0)$ に対し、に対し、$h : (S^n,e_0) \longrightarrow (X \times Y,(x_0,y_0))$ を、$h(x)=(f(x),g(x))$ で定義する。これより、$p([h])=([f],[g])$ である。次に単射であるが、$p[f]=1$ とすると、$p_X \circ f \simeq e_{x_0}, p_Y \circ f \simeq e_{y_0}$ であり、それぞれ定値写像とホモトピックである。このホモトピーを

$$H_X : S^n \times I \longrightarrow X,\ H_Y : S^n \times I \longrightarrow Y$$

とすれば、$H = H_X \times H_Y$ が $[f] \simeq e_{(x_0,y_0)}$ を与える。

□