対空間のホモトピー群

ホモロジー群の時のように、ホモトピー群を対空間に拡張します。

1　対空間のホモトピー群

定義 1.1. (X, A, x_0) を基点つきの対空間とする。$n \geqq 1$ に対し、$J^n = I^n \times \{1\} \cup \partial I^n \times I$ とおき、

$$\pi_n(X, A, x_0) = \{f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)\}/ \simeq$$

で定義し、$n \geqq 2$ において、演算を $\pi_n(X, x_0)$ と同じく定義するとこれは群となり、(X, A, x_0) の n 次ホモトピー群と呼ぶ。また、$n \geqq 3$ において、これはアーベル群となる。特に $A = \{x_0\}$ に対しては、$\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$ である。また写像 $f : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$ に対し、通常のホモトピー群間の準同型とまったく同じに、

$$f_* : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

が誘導される。

注意 1.2. $n \geqq 1$ に対し、$(I^n/J^{n-1}, \partial I^n/J^{n-1}) \cong (D^n, S^{n-1})$ なので、

$$\pi_n(X, A, x_0) \cong \{f : (D^n, S^{n-1}, e_0) \longrightarrow (X, A, x_0)\}/ \simeq$$

である。

定義 1.3. (X, A, x_0) に対し、

$$\partial : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$$

を次で定義する。$[\alpha] \in \pi_n(X, A, x_0)$ に対し、$\alpha : (D^n, S^{n-1}, e_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ なので、制限写像

$$\alpha_{|S^n} : (S^{n-1}, e_0) \longrightarrow (A, x_0)$$

になり、$\partial[\alpha] = [\alpha_{|S^n}]$ が定義できる。制限写像を使っているため、これは自然な準同型である。つまり、$f : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$ という写像に対し、

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, A, x_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_{n-1}(A, x_0) \arrow[d, "f_*"] \\
\pi_n(XY, B, y_0) \arrow[r, "\partial"'] & \pi_{n-1}(B, y_0)
\end{tikzcd}$$

は可換である。

補題 1.4. $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ に対し、$f(D^n) \subset A$ ならば、$[f] = e \in \pi_n(X, A, x_0)$ である。

証明 D^n は e_0 に可縮なので、

$$H : (D^n \times I, S^{n-1} \times I, \{e_0\} \times I) \longrightarrow (D^n, D^n, e_0)$$

$H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = e_0$ となるホモトピーが存在する。(S^{n-1} は保たない) これより、

$$G = f \circ H : (D^n \times I, S^{n-1} \times I, \{e_0\} \times I) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

を考えると、$G(x, 0) = f(x)$, $G(x, 1) = x_0$ なので、$[f]$ は単位元である。 □

系 1.5. 基点付空間 (X, x_0) に対し、$\pi_n(X, X, x_0) = *$ である。

定理 1.6. 基点つき対空間 (X, A, x_0) に対し、次の完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0)$$

ただし、i, j は包含写像である。

証明 1. $\pi_n(X, x_0)$ における完全性。補題 1.4 により、$j_* \circ i_* = e$ であることがわかる。逆に、$j_*[f] = e \in \pi_n(X, A, x_0)$ とすると、$e_{x_0} \simeq j \circ f$ であり、そのホモトピーを $H : (D^n, S^{n-1}, e_0) \times I \longrightarrow (X, A, x_0)$ とおく。ここで、$g : (D^n, S^{n-1}, e_0) \longrightarrow (A, x_0, x_0)$ を次で定義する。

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & 0 \leqq |x| \leqq \dfrac{1}{2} \\ H\left(\dfrac{x}{|x|}, 2(1 - |x|)\right) & \dfrac{1}{2} \leqq |x| \leqq 1 \end{cases}$$

また、$G\ (D^n, S^{n-1}, e_0) \times I \longrightarrow (X, A, x_0)$ を、

$$G(x, t) = \begin{cases} f\left(\dfrac{2x}{1+t}\right) & 0 \leqq |x| \leqq \dfrac{1+t}{2} \\ H\left(\dfrac{x}{|x|}\ ,\ \dfrac{2(1 - |x|))}{1-t}\right) & \dfrac{1+t}{2} \leqq |x| \leqq 1 \end{cases}$$

と定義すると、このホモトピーにより、$i \circ g \simeq f$ である。よって、$i_*[g] = [f]$ となる。

2. $\pi_n(X, A, x_0)$ における完全性。$[f] \in \pi_n(X, x_0)$ に対し、$f : (D^n, S^{n-1}, e_0) \longrightarrow (X, x_0, x_0)$ と見なせるので、

$$\partial \circ j_*[f] = [f_{|S^{n-1}}] = e$$

である。逆に、$[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ に対し、$\partial[f] = e \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ とする。つまり、$e_{x_0} \simeq f_{|S^{n-1}}$ であり、そのホモトピーを $H : (S^{n-1}, e_0) \times I \longrightarrow (A, x_0)$ とする。先ほどと同様に $g : (D^n, S^{n-1}, e_0) \longrightarrow (X, x_0, x_0)$ を定義する。つまり、

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & 0 \leqq |x| \leqq \dfrac{1}{2} \\ H\left(\dfrac{x}{|x|}, 2(1 - |x|)\right) & \dfrac{1}{2} \leqq |x| \leqq 1 \end{cases}$$

ホモトピー G も同様に構成すれば、$j \circ g \simeq f$ であり、$j_*[g] = [f]$ となる。

3. $\pi_{n-1}(A, x_0)$ における完全性。まず、考えるべき

$$\pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(X, x_0)$$

という列は、

$$\pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, X, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(X, x_0)$$

と等しいことが、∂ の自然性から導かれる。ここで、系 1.5 により、$\pi_n(X, X, x_0) = *$ なので、$\partial \circ i_* = e$ である。逆に、$[f] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ に対し、$i_*[f] = e \in \pi_{n-1}(X, x_0)$ とする。つまり、$i \circ f \simeq e_{x_0}$ であるが、このホモトピー $H : (S^{n-1}, e_0) \times I \longrightarrow (X, x_0)$ を考えると、$H(a, 1) = x_0$ なのだから、$H : (CS^{n-1} = D^n, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ で、$H_{|S^{n-1}} = f$ と考えられる。これより、$[H] \in \pi_n(X, A, x_0)$ であり、$\partial[H] = f$ である。

□

2 連結性

ある程度低い次元のホモトピー群が消えている空間は扱いやすい。0 次が消えているのが弧状連結、1 次までが消えているのを単連結とよんだりした。

定義 2.1. 空間 X が n-連結であるとは、任意の $m \leqq n$ と基点 $x_0 \in X$ に対し、$\pi_m(X, x_0) = *$ であることを意味する。また、対空間 (X, A) が n-連結であるとは、同じく n 以下の次元に対し、$\pi_m(X, A, x_0) = *$ が任意の基点で成り立っていることを意味する。

命題 2.2. X が n-連結であることと、$0 \leqq m \leqq n$ において、任意の写像 $f : S^m \longrightarrow X$ が D^{m+1} に拡張可能であることは同値である。

証明 X を n-連結とする。$f : S^m \longrightarrow X$ において、$[f] \in \pi_m(X, f(e_0)) = *$ なので、$f \simeq e_{f(e_0)}$ である。このホモトピーを $H : S^m \times I \longrightarrow X$ とおくと、$H(x, 1) = f(e_0)$ なので、f の拡張 $D^m \longrightarrow X$ を得る。逆も同様である。 □

系 2.3. (X, A) が n-連結であることと、$0 \leqq m \leqq n$ において、任意の写像 $f : (D^m, S^{m-1} \longrightarrow (X, A)$ において、$g : (D^m, S^{m-1}) \longrightarrow (X, A)$ で、$g(D^m) \subset A$, $f \simeq g$ となる写像が存在することは同値である。

定義 2.4. $f : X \longrightarrow Y$ が n-同値であるとは、任意の基点に対し、$f_* : \pi_m(X, x_0) \longrightarrow \pi_m(Y, f(x_0))$ を考えたとき、

1. $0 \leqq m \leqq n - 1$ において、f_* は全単射
2. $m = n$ において、f_* は全射

がなりたつときをいう。特に $n = \infty$ のとき、f を弱同値とよぶ。つまり全次元のホモトピー群の同型を誘導する写像である。

命題 2.5. $i : A \longrightarrow X$ が n-同値であることと、(X, A) が n-連結であることは同値である。

証明 定理 1.6 における完全列より直ちに導かれる。 □