0.1 Quasifibrations

Definition 0.1.1

$p: E \longrightarrow B$ が準ファイバー空間（quasifibration）であるとは、任意の $b \in B$ と、$e \in p^{-1}(b)$ に対して、

$$p_*: \pi_*(E, p^{-1}(b), e) \longrightarrow \pi_*(B, b)$$

が全単射となることである。

Remmark 0.1.2

$p: E \longrightarrow B$ が quasifibration であることと、

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(p^{-1}(b), e) \longrightarrow \pi_n(E, e) \longrightarrow \pi_n(B, b) \longrightarrow \pi_{n-1}(p^{-1}(b), e) \longrightarrow \cdots$$

の完全列が任意の $b \in B$ と、$e \in p^{-1}(b)$ に対し、存在することは同値である。

proof)　もともと、$(E, p^{-1}(b))$ の対のホモトピー完全列があるので、five lemma を使えば示される。

$\square$

Remmark 0.1.3

fibration ならば quasifibration である。

Definition 0.1.4

$p: E \longrightarrow B$, $p': E' \longrightarrow B'$ を quasifibration としたとき、

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\
B \arrow[r, "f"'] & B'
\end{tikzcd}$$

を可換にする写像を、

$$(\tilde{f}, f): (E, B) \longrightarrow (E', B')$$

と書いて準ファイバー空間の間の写像と呼ぶ。このとき、$b \in B$ に対し、

$$\tilde{f}_{|_{p^{-1}(b)}}: p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(f(b))$$

が定義され、$B' = B$, $f = 1_B$ で各 $b \in B$ において、これが weak equivalence となるとき $\tilde{f}$ を準ファイバー空間の同型と呼び、またこのとき $E' \simeq E'$ とかく。

Remmark 0.1.5

$p : E \longrightarrow B$, $p' : E' \longrightarrow B$ が同型な quasifibration ならば、$E \simeq_w E'$ である。

proof)　$(E, p^{-1}(b))$, $(E', p'^{-1}(b))$ の長い完全列を考えて five lemma から成り立つ。

□

Proposition 0.1.6

$p : E \longrightarrow B$ が quasifibration であれば、これを fibration に取り替え、$q : E_p \longrightarrow B$ が構成できるが、このとき射影、

$$r : E_p \longrightarrow E$$

は quasifibration の同型である。

proof)　もともと、r は homotopy equivalence であったから、

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(E_p) \arrow[r] \arrow[d, "r_*"'] & \pi_{n+1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \pi_n(q^{-1}(b)) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(E_p) \arrow[d, "r_*"] \\
\pi_{n+1}(E) \arrow[r] & \pi_{n+1}(B) \arrow[r] & \pi_n(p^{-1}(b)) \arrow[r] & \pi_n(E)
\end{tikzcd}$$

の図式の両側は同型である。よって five lemma から示せる。

□

Remmark 0.1.7

$p : E \longrightarrow B$ が quasifibration であっても、$A \subset B$ に対し、

$$p_{|_{p^{-1}(A)}} : p^{-1}(A) \longrightarrow A$$

が quasifibration であるかは定かでない。というわけで次の定義を考える。

Definition 0.1.8

$p : E \longrightarrow B$ が quasifibration で、$A \subset B$ に対し、$E_A = p^{-1}(A)$ とおく。

$$p_{|_{E_A}} : E_A \longrightarrow A$$

が quasifibration であるとき、A を B の特定部分空間と呼ぶ。

Lemma 0.1.9

$p : E \longrightarrow B$ が quasifibration で、A は B の特定部分空間とする。このとき、任意の $a \in A$, $e \in p^{-1}(a)$ に対し、

$$p_* : \pi_*(E, E_A, e) \longrightarrow \pi_*(B, A, a)$$

は同型である。

proof) (E, E_A) と (B, A) のホモトピー完全列を考え、

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_n(E,e) & \longrightarrow & \pi_n(E,E_A,e) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(E_A,e) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(E,e) \\
\downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle p_{|E_A *}} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\
\pi_n(B,a) & \longrightarrow & \pi_n(B,A,a) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A,a) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(B,a)
\end{array}$$

$p, p_{|E_A}$ がそれぞれ quasifibration であるので、five lemma より示せる。

$\square$

Corollary 0.1.10

$p : E \longrightarrow B$ に対し、B の特定部分空間の被覆 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在し、各 $\lambda \in \Lambda$ に対し、

$$p_* : \pi_*(E, E_{A_\lambda}, e) \longrightarrow \pi_*(B, A_\lambda, a)$$

が同型ならば、p は quasifibration である。

Theorem 0.1.11

$f : (X; A, B) \longrightarrow (Y; C, D)$ が exisive triad 間の写像とする。このとき、f の制限から誘導されるホモトピー群の間の準同型、

$$(A, A \cap B) \longrightarrow (C, C \cap D) \ , \ (B, A \cap B) \longrightarrow (D, C \cap D)$$

が n-equivalence ならば、

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, C) \quad , \quad f : (X, B) \longrightarrow (Y, D)$$

も n-eqivalence である。

proof) 省略

□

Corollary 0.1.12

$f:(X;A,B)\longrightarrow(Y;C,D)$ が exisive triad 間の写像とし、f の制限、

$$A\longrightarrow C\ ,\ B\longrightarrow D\ ,\ A\cap B\longrightarrow C\cap D$$

がすべて weak-equivalence ならば、$f:X\longrightarrow Y$ も weak-equivalence である。

proof)　　仮定より $(A,A\cap B)$ と $(C,C\cap D)$ のホモトピー完全列と five lemma より、

$$(A,A\cap B)\longrightarrow(C,C\cap D)\ ,\ (B,A\cap B)\longrightarrow(D,C\cap D)$$

は weak-equivalence である。ここで Th 0.1.11 により、

$$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$$

は weak-equivalence である。これでさらに (X,A) と (Y,B) のホモトピー完全列で five lemma を使えば、

$$f:X\longrightarrow Y$$

が weak-equivalence となる。

□

Proposition 0.1.13

$p:E\longrightarrow B$ に対し、$B=U\cup V$ で、U,V が B の開集合で、$U,V,U\cap V$ が B の特定部分空間ならば、p は quasifibration である。

proof)　　$(E_U,E_{U\cap V},p^{-1}(b))$ と $(U,U\cap V,b)$ のホモトピー群完全列と、five lemma を用いると、

$$p_*:\pi_*(E_U,E_{U\cap V})\longrightarrow\pi_*(U,U\cap V)$$

は同型である。同様にして、

$$p_*:\pi_*(E_V,E_{U\cap V})\longrightarrow\pi_*(V,U\cap V)$$

も同型。これにより、Th　0.1.11

$$p_*:\pi_*(E,E_U)\longrightarrow\pi_*(B,U)$$

も同型になる。また仮定より、

$$p_* : \pi_*(E_U, p^{-1}(b)) \longrightarrow \pi_*(U, b)$$

が同型なので、$(E, E_U, p^{-1}(b))$ と、(B, U, b) のホモトピー完全列と five lemma から、

$$p_* : \pi_*(E, p^{-1}(b)) \longrightarrow \pi_*(B, b)$$

が同型であるため、p は quasifibration である。

$\square$

Proposition 0.1.14

$p : E \longrightarrow B$ に対し B は、

$$B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots$$

という部分空間列において、$B = \mathrm{colim}_n B_n$ とする。各 B_n が B の特定部分空間ならば、p は quasifibration である。

proof) $p : E \longrightarrow B$ に対し、任意の $b \in B$ は $b \in B_n$ となる n が存在する。$m \geqq n$ に対し、

$$p_{|_{E_{B_m}}*} : \pi_*(E_{B_m}, p^{-1}(b)) \longrightarrow \pi_*(B_m, b)$$

は同型であり、π_* が sequencial colimit と可換であるため、

$$p_* : \pi_*(E, p^{-1}(b)) \cong \mathrm{colim}_{m \geqq n} \pi_*(E_{B_m}, p^{-1}(b)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{colim}_{m \geqq n} \pi_*(B_m, b) \cong \pi_*(B, b)$$

となり p が quasifibration となる。

$\square$

Quaifibration を用いた代表的な定理に Dold-Thom の定理というものがあります。これはホモトピー群とホモロジー群の相関を直接的に表す定理です。厳密な証明は面倒なので書略するするとして紹介だけ。

Definition 0.1.15 *symmetric products*

X を位相空間とし、Σ_n を n 次の対称群とし離散位相をいれて位相群とする。このとき、X の n 重積 X^n に対する Σ_n の作用、

$$\Sigma_n \times X^n \longrightarrow X^n$$

を、$(\sigma; x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ で定義する。このとき、この軌道空間 $X^n/\Sigma_n = SP^n(X)$ とおき、X の n 次対称積とよぶ。また、$f : X \longrightarrow Y$ に対し、$f^n : X^n \longrightarrow Y^n$ から、

$$\tilde{f} : SP^n(X) \longrightarrow SP^n(Y)$$

が誘導される。

Example 0.1.16

$SP^n(I) \cong \Delta^n$ である。

Definition 0.1.17

$(X, *)$ が基点付空間の場合、包含写像 $X^n \hookrightarrow X^{n+1}$ を、$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \cdots, x_n, *)$ で定義し、$SP^n(X) \hookrightarrow SP^{n+1}(X)$ が誘導され、

$$X = SP^1(X) \subset SP^2(X) \subset \cdots \subset SP^n(X) \subset \cdots$$

の空間列が定義できる。これより、$\mathrm{colim}_n SP^n(X) = SP(X)$ とし X の無限対称積と呼ぶ。同様に $f : X \longrightarrow Y$ から、$\tilde{f} : SP(X) \longrightarrow SP(Y)$ が誘導される。

Remmark 0.1.18

$SP : \mathrm{TOP} \longrightarrow \mathrm{TOP}$ は共変関手である。

Theorem 0.1.19 *Dold-Thom*

(X, A) を弧状連結な NDR pair とする。射影 $p : X \longrightarrow X/A$ に対し、$\tilde{p} : SP(X) \longrightarrow SP(X/A)$ は fiber が $SP(A)$ である quasifibration である。

proof) アイデアとしては $SP(X/A) = \mathrm{colim}_n SP^n(X/A)$ であるため、各 $SP^n(X/A)$ が $SP(X/A)$ の特性部分空間であれば良い。$n = 0$ から始める。$SP^0(X/A) = *$ と考えれば、これは明らかに特定部分空間である。あとは帰納的な方法を用いるがいずれにしても面倒である。

□

Definition 0.1.20

基点付き空間の族、$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、その直積 $\prod X_\lambda$ その元、$i:\Lambda \longrightarrow \coprod X_\lambda$ に対し、有限個以外の $\lambda\in\Lambda$ に対し、$i(\lambda)=*$ を満たす元からなる部分空間を、$\prod_w X_\lambda$ とかき、X_λ の weak product とよぶ。

Theorem 0.1.21

基点付き空間の族、$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、

$$\oplus i_* : \oplus_{\lambda\in\Lambda}\pi_*(X_\lambda) \longrightarrow \pi_*(\prod_w X_\lambda)$$

は同型である。ただし、$i: X_\lambda \longrightarrow \prod_w X_\lambda$ は inclusion である。

proof)　　weak product がちょうど群の直積、直和の考えと合致していることから示せる。

□

Theorem 0.1.22

X を基点付きの弧状連結な CW 複体とする。このとき、自然な同型

$$\pi_*(SP(X)) \cong \widetilde{H}(X)$$

が存在する。

proof)　　Reduced Homology Theory の５つの公理を確かめる。$SP^n(S^0)$ は $n+1$ 個の元からなる離散空間である。つまり、$SP(X)\cong \mathbf{Z}$ となる。よって、

$$\pi_0(SP(S^0)) \cong \pi_0(\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$$

は群の同型となるため次元公理が成り立つ。Th　0.1.19 から完全性公理が示され、$SP(\vee X_\lambda)\cong \prod_w SP(X_\lambda)$ となり、

$$\pi_*(SP(\vee X_\lambda) \cong \pi_*(\prod_w SP(X_\lambda)) \cong \oplus\pi_*(SP(X_\lambda))$$

なので加法性公理も成り立つ。そして自然に、$SP(X) \simeq_w \Omega SP(\Sigma X)$ となるため、

$$\pi_n(SP(X)) \cong \pi_n(\Omega SP(X)) \cong \pi_{n+1}(SP(\Sigma X))$$

となり懸垂公理も確認でき、$SP^n : \mathrm{TOP} \longrightarrow \mathrm{TOP}$ は homotopy 不変関手であり、CW 複体に限定すればすれば、$SP : \mathrm{CW} \longrightarrow \mathrm{Top}$ も homotopy 不変なので、ホモトピー公理も成立する。

□

証明で省いたところ、曖昧なところが相当あります。正確に知りたい方は Dold-Thom の論文か Allen Hacther の HP を見ることをお勧めします。

ただ、この無限対称積と Dold-Thom の定理には、無限 Loop 空間というものが深くかかわっていて、そちらも今後考察して話せればと思います。

Corollary 0.1.23 （*Elienberg MacLane* 空間の構成法）

(π, n) 型の Moore 空間 $M(\pi, n)$ に対し、$SP(M(\pi, n))$ は (π, n) 型の Elienberg MacLane 空間 $K(\pi, n)$ である。

proof) $\pi_*(SP(M(\pi, n))) \cong \widetilde{H}_*(M(\pi, n))$ であるため。

□

最後にもう一つ。ホモトピー群とホモロジー群をつなぐものとして忘れてならないのは Hurewiz 準同型である。それに関しては次のような定理がある。証明は雰囲気である。

Theorem 0.1.24

$X = SP^1(X) \hookrightarrow SP(X)$ を inclusion とするとき、ここからホモトピー群の間の準同型を誘導すると、

$$\pi_*(X) \longrightarrow \pi_*(SP(X)) \cong \widetilde{H}_*(X)$$

となるが、これは Hurewiz 準同型である。

proof) Reduced Homology Theory の一意性を示した証明を見返すと、その間の具体的な同型写像は Hurewiz 準同型を用いていたため、細かく見ていけば示せるような気がする。

□