

0.1 Adams Operation

Lemma 0.1.1

A を λ 半環としたとき、 $K(A)$ は λ 環で、 $\alpha : A \rightarrow K(A)$ は λ 半環の準同型であり λ 環 R と λ 準同型に対して普遍的である。

proof) $K(A)$ の形式的べき級数環 $K(A)[[t]]$ の部分集合、

$$U(A) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in K(A) \mid a_0 = 1 \right\}$$

とおくと、これは積で閉じていてさらに逆元をもつので積でアーベル群である。

$$\lambda_t : A \rightarrow U(A)$$

を、 $\lambda_t(a) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j(a)t^j$ で定義する。

$$\lambda_t(a+b) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j(a+b)t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{n+m=j} \lambda^n(a)\lambda^m(b) \right) t^j = \lambda_t(a)\lambda_t(b)$$

であるので、 λ_t は半群の準同型である。このとき、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & K(A) \\ & \searrow \lambda_t & \vdots \\ & & U(A) \end{array}$$

を可換にする $\tilde{\lambda}_t : K(A) \rightarrow U(A)$ が一意に存在する。よって、 $\tilde{\lambda}_t(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j(x)t^j$ となる $\gamma_j(x) \in K(A)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) が決まる。これより、 $\tilde{\lambda}^j : K(A) \rightarrow K(A)$ を $\tilde{\lambda}^j(x) = \gamma_j(x)$ と定めれば、これにより $K(A)$ が λ 環となる。また、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & K(A) \\ \lambda^j \downarrow & & \downarrow \tilde{\lambda}^j \\ A & \xrightarrow{\alpha} & K(A) \end{array}$$

は可換であるので、 $\alpha : A \rightarrow K(A)$ は λ 半環の準同型であるが、さらに λ 環 R と λ 準同型 $f : A \rightarrow R$ があつたとき、定義より通常の準同型で $g : K(A) \rightarrow R$ で $g \circ \alpha = f$ となるものが一意に存在するが、これは、

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & K(A) \\
 \downarrow \lambda_A^j & \searrow f & \swarrow g \\
 & R & \\
 & \downarrow \lambda_R^j & \\
 A & \xrightarrow{\alpha} & K(A) \\
 \downarrow f & \searrow & \swarrow g \\
 & R &
 \end{array}$$

の図式で右の四角以外は可換の状況なので、右の四角も可換になるので g は λ 準同型である。

Definition 0.1.2

A を λ 半環とし、 $x \in A$ に対し、 $\lambda_t : A \rightarrow U(A)$ を $\lambda_t(x) = \sum \lambda^j(x)t^j$ により定義する。このとき、

$$\psi_t : A \rightarrow A[[t]]$$

を、 $\psi_{-t} = -t \left(\frac{d\lambda_t(x)}{dt} \right) \lambda_t(x)^{-1}$ により定義する。ただし微分は、解析の通り $t^n \mapsto nt^{n-1}$ で与えられる単なる対応と考える。

$$\psi_t(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$$

となる $a_j \in A$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) が x に対して一意に定まるので、

$$\psi^k : A \rightarrow A \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

を $\psi^k(x) = a_k$ と定義し、これを A の Adams 作用素 (Adams operation) と呼ぶ。

以下で Adams 作用素の基本的な性質を考える。以下 A は λ 環で λ^j をその λ 作用素とする。

Lemma 0.1.3

$\forall x \in A$ に対し、 $\psi^0(x) = 0$

proof) ψ_t の定義を見れば、 $K(A)[[t]]$ の元に t が掛けられているので、0 次の係数は 0 である。

Lemma 0.1.4

各 $k \geq 0$ に対し、Adams 作用素 ψ^k は群の準同型である。

proof) $x, y \in A$ としたとき、 $\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\lambda_t(y)$ であった。よって、解析の時のように積の微分法が適用できて、

$$\frac{d\lambda_t(x+y)}{dt} = \frac{d(\lambda_t(x)\lambda_t(y))}{dt} = \frac{d\lambda_t(x)}{dt}\lambda_t(y) + \lambda_t(x)\frac{d\lambda_t(y)}{dt}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \psi_{-t}(x+y) &= -t \left(\frac{d\lambda_t(x+y)}{dt} \right) \lambda_t(x+y)^{-1} \\ &= -t \left(\frac{d\lambda_t(x)}{dt}\lambda_t(y) + \lambda_t(x)\frac{d\lambda_t(y)}{dt} \right) \lambda_t(x)^{-1}\lambda_t(y)^{-1} \\ &= -t \left(\frac{d\lambda_t(x)}{dt} \right) \lambda_t(x)^{-1} + -t \left(\frac{d\lambda_t(y)}{dt} \right) \lambda_t(y)^{-1} = \psi_{-t}(x) + \psi_{-t}(y) \end{aligned}$$

ここで、

$$\sum \psi^k(x+y)t^k = \psi_t(x+y) = \psi_t(x) + \psi_t(y) = \sum (\psi^k(x) + \psi^k(y))t^k$$

であるので、係数を比較すれば、 $\psi^k(x+y) = \psi^k(x) + \psi^k(y)$

Lemma 0.1.5

$j > 1$ のとき、 $\lambda^j = 0$ ならば、任意の $k \geq 1$ に対し $\psi^k(x) = x^k$

proof) $\lambda^j(x) = 0$ ($j > 1$) であるので、

$$\lambda_t(x) = \sum \lambda^j(x)t^j = 1 + xt$$

となる。これより、

$$\frac{d\lambda_t(x)}{dt} = x, \quad \lambda_t(x)^{-1} = \sum_j (-xt)^j = \sum_{j=0}^{\infty} x^j (-t)^j$$

となる。よって、

$$\psi_{-t}(x) = (-t) \left(\frac{d\lambda_t(x)}{dt} \right) \lambda_t^{-1}(x) = -tx \sum_j x^j (-t)^j = \sum_j x^{j+1} (-t)^{j+1}$$

つまり、 $\psi_t(x) = \sigma x^{j+1} t^{j+1} = xt + x^2 t^2 + \dots$ であるので、 $\psi^k(x) = x^k$

Remmark 0.1.6

X を compact Hausdorff としたとき、 $\text{Vect}(X)$ は λ 半環であったので、Lemma ?? $K(X)$ は λ 環である。また $\text{Vect}(X)$ の λ 作用素を用いて $\tilde{K}(X)$ も λ 環となる。よって、 $K(X)$ 、 $\tilde{K}(X)$ の Adams 作用素

$$\psi^k : K(X) \longrightarrow K(X), \quad \psi^k : \tilde{K}(X) \longrightarrow \tilde{K}(X)$$

を考えることができる。ここからは、この Adams 作用素を見ていくがどちらも共通する性質なので特に区別せず見ていくが、元を取るときは $\tilde{K}(X)$ のほうが安易なのでそちらを採用する。

Lemma 0.1.7 (自然性)

ψ^k は natural である。

proof) $f : X \longrightarrow Y$ に対し、 $f^* \circ \psi^k = \psi^k \circ f^*$ が成り立つことを示せばよいが、 $f^* : \text{Vect}(Y) \longrightarrow \text{Vect}(X)$ が λ 半環の準同型になるので、成立する。

Lemma 0.1.8 (準同型性)

ψ^k は環の準同型である。

proof) 群としての準同型は Lemma 0.1.4 で示した。積を保つことを示す。 $a, b \in \tilde{K}(X)$ で、 a, b が直線束の場合 (正確には直線束を代表元に持つ場合)、ベクトル束の j 重外積べきを考えると、

$$\lambda^j(a) = \lambda^j(b) = \lambda(ab) = 0 \quad (j > 1)$$

であるので、Lemma 0.1.5 により、

$$\psi^k(ab) = (ab)^k = a^k b^k = a\psi^k(a)\psi^k(b)$$

よって、直線束の場合積を保つ。ついでに積の単位元 $\varepsilon^1 \in \widetilde{K}(X)$ は自明な直線束であるので、 $\psi^k(\varepsilon) = \varepsilon^k = \varepsilon$ であるので単位元を保つ。

続いて一般のベクトル束の場合、積を保つことを示す。 $a, b \in \widetilde{K}(X)$ に対し、分裂原理を用いると分裂単射 $g: B \rightarrow X$ が存在し、 $g^*(a), g^*(b)$ が直線束の Whitney 和であるものが存在する。よって、 $\widetilde{K}(B)$ における Adams operation を考えれば、

$$\psi^k(g^*(ab)) = \psi^k(g^*(a)g^*(b)) = \psi^k(g^*(a))\psi^k(g^*(b))$$

最後の等号は Adams operation が和に対しては Lemma 0.1.4 によって準同型になるためである。これより、Adams operation の自然性を用いて、

$$g^*(\psi^k(ab)) = g^*(\psi^k(a)\psi^k(b))$$

であり g^* は単射なのだから、 $\psi^k(ab) = \psi^k(a)\psi^k(b)$

また $K(X)$ においては $a - \varepsilon^n \in K(X)$ という形で元が取れるから、 a を分裂原理で分解し、 ε^n は ε^1 の Whitney 和に分解できるので同様に証明できる。

Lemma 0.1.9 (可換性)

$$\psi^n \circ \psi^m = \psi^m \circ \psi^n$$

proof) $a \in \widetilde{K}(X)$ が直線束の場合には、

$$\psi^n \circ \psi^m(a) = a^{nm} = \psi^m \circ \psi^n$$

であるので成立する。一般の場合は分裂原理を用いて Lemma 0.1.8 に倣えば示せる。

Proposition 0.1.10

p を素数とする。このとき、 $\psi^p(x) \equiv x^p \pmod{p}$ である。つまり、 $y \in \widetilde{K}(X)$ が存在し、 $\psi^p(x) - x^p = py$ となる。

proof) $x \in \widetilde{K}(X)$ を直線束の n 個の Whitney 和とし、

$$x = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n$$

と表す。ただし、 η_j ($1 \leq j \leq n$) は直線束。このとき、

$$\psi^p(x) = \eta_1^p + \cdots + \eta_n^p \equiv (\eta_1 + \cdots + \eta_n)^p = x^p \pmod{p}$$

となることは展開した項の係数を考えれば分かる。よって直線束の Whitney 和に対しては成り立つので、一般の場合は分裂原理を用いればよい。