## 0.1　形式的べき級数

多項式環は有限個の項の和であるが、これを形式的に無限和を考えたのが形式的べき級数（formal power series）である。

### Definition 0.1.1

単位元を持つ可換環 $R$ に対し、

$$R[[x]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \mid r_n \in R\ \}$$

と形式的に定義する。もちろん有限和に対しても、それ以上の係数がすべて 0 と見て $R[[x]]$ の元と見なす。

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (r_n + s_n) x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{n} r_{n-m} s_m \right) x^n$$

で演算を定義すれば、零元が 0、単位元が 1 の可換環になる。これを文字 $x$ に対する $R$ を係数とした形式的べき級数環（formal power series）と呼ぶ。

より正確に言えば、集合として $R[[x]] = \prod_{n \geqq 0}^{\infty} R$ である。群の直積は群になるので群構造は確認できるし、直積に積構造を入れることも同様にできるので、それを形式的に書けば上記のようになる。

多項式環との大きな違いは正則元、つまり積に関する逆元の存在に関わることである。普通の多項式環では、例え体を係数に持っていても 0 次以外の項が存在していては逆元は存在しない。簡単な例でいくと、$1 - x$ の逆元は $\dfrac{1}{1-x}$ であるが、これは $x$ の有限和の多項式では表せない。ところが、$x$ を実数としたとき、$x$ の関数 $1 - x$ は解析学で見るように、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

と無限和で表せるのでこれが逆元ということになる。まぁ、解析では級数を扱う際は収束性などを常に考慮しなければならないが、formal power series はそのあたりの制限が無い。

### Theorem 0.1.2

$\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \in R[[x]]$ が正則元である $\Longleftrightarrow$ $r_0$が $R$ の正則元

proof) $\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$ を正則元とすると、その逆元 $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ が存在する。よって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{n} r_{n-m} s_m \right) x^n = 1$$

であるので、$r_0 s_0 = 1$ であり、$r_0$ は正則元である。

$\Longleftarrow$ 逆に $r_0$ を正則元とすると、$s_0 = 1/r_0$ とおけば $r_0 s_0 = 1$。次に、$s_1 = -r_1 s_0 / r_0$ とおけば、$r_0 s_1 + r_1 s_0 = 0$ である。以下帰納的に $\sum_{m=0}^{n} r_{n-m} s_m = 0$ とするように $s_n$ が構成できるので、これを係数とした formal power series が逆元である。

□

### Example 0.1.3

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{in} \quad R[[x]]$$