0.1 Bott 周期性定理

もともと Bott は $U = \mathrm{colim}_n U(n)$、あるいは $O = \mathrm{colim}_n O(n)$ のホモトピー群が周期性を持つことに気がついたのが発端だといわれている。

main theorem である Bott 周期性定理は次の通りである。

Theorem 0.1.1

有限複体 X に対し、自然な同型 $\widetilde{K}(X) \cong \widetilde{K}(\Sigma^2 X)$ が存在する。

この証明には次の方法が考えられる。

$$\widetilde{K}(X) = [X, BU]\ ,\ \widetilde{K}(\Sigma^2 X) = [\Sigma^2 X, BU] = [X, \Omega^2 BU]$$

であるので、homotopy equivalence である $\lambda : BU \longrightarrow \Omega^2 BU$ を探す事が考えられる。実際には、homotopy equivalence

$$\lambda : BU \times \mathbf{Z} \longrightarrow \Omega^2 BU$$

が存在する。この λ の構成は河野・玉木の「一般コホモロジー」に書いてある。

一方 Allen Hatcher の論文にはまず $K(X \times S^2) \cong K(X) \otimes K(S^2)$ を示し、smash product を混ぜた K^* の exact sequence から定理を導いている。こちらのほうが元の対応がはっきりしているのでここではこちらの方法を紹介する。

Definition 0.1.2

$\mu : K(X) \otimes K(Y) \longrightarrow K(X \times Y)$ を $a \otimes b \in K(X) \otimes K(Y)$ に対し、

$$\mu(a \otimes b) = p_1^*(a) p_2^*(b)$$

により定義する。ただし、p_1, p_2 はそれぞれの成分への projection とする。$K(X) \otimes K(Y)$ は環であり、μ は環準同型である。μ を external product とよぶ。

また、$\widetilde{K}$ においては、$\widetilde{K}(X) = \mathrm{Ker}(K(X) \longrightarrow K(*))$ であり、$K(X) \cong \widetilde{K}(X) \oplus \mathbf{Z}$

でもあったことを思い出すと、

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{K}(X)\otimes\widetilde{K}(Y) \arrow[d] & \widetilde{K}(X\wedge Y) \arrow[d] \\
K(X)\otimes K(Y)\cong\widetilde{K}(X)\otimes\widetilde{K}(Y)\oplus\widetilde{K}(X)\oplus\widetilde{K}(Y)\oplus\mathbf{Z} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & K(X\times Y) \arrow[d] \\
\widetilde{K}(X)\oplus\widetilde{K}(Y)\oplus\mathbf{Z} \arrow[r, "p_{\mathbf{Z}}"'] & K(*)\cong\mathbf{Z}
\end{tikzcd}
$$

において、両側縦は完全列で、下の図式は可換である。(ベクトル束の次元で話を進めているので external product、$\mathbf{Z}\otimes\mathbf{Z}\cong\mathbf{Z}$、$K(X)\cong\widetilde{K}(X)\oplus\mathbf{Z}$ の対応をそれぞれ考えればよい。)よって μ の制限により、$\tilde{mu}:\widetilde{K}(X)\otimes\widetilde{K}(Y)\longrightarrow\widetilde{K}(X\wedge Y)$ が導かれる。同じくこれも external product と呼ぶ。

external product は特異コホモロジーで言うところのクロス積である。Bott 周期性定理の証明には $Y=S^2$ のときが重要で、このとき external product が同型になることを示したい。そのためには $K(S^2)$ の構造を知る必要がある。

Lemma 0.1.3

$f,g:S^{n-1}\longrightarrow U(n)$ に対し、$f\oplus g:S^{k-1}\longrightarrow U(2n)$ を $f\oplus g(x)=\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & g(x)\end{pmatrix}$ で定義し、$fg:S^{k-1}\longrightarrow U(n)$ を行列の積により $fg(x)=f(x)g(x)$ で定義する。このとき、$f\oplus g\simeq fg\oplus E^n$ である。ただし、E^n は単位行列への constant map

proof)　　$T\in U(2n)$ を $(x_1,\cdots x_{2n})\mapsto(x_{n+1},\cdots,x_{2n},x_1,\cdots,x_n)$ により定める。$U(2n)$ は弧状連結であるから、$\alpha:I\longrightarrow U(2n)$ で、$\alpha(0)=E^{2n}$, $\alpha(1)=T$ となるものが存在する。よって、$H:S^{k-1}\times I\longrightarrow U(2n)$ を、$H(x,t)=(f\oplus E^n)(x)\alpha(t)(g\oplus E^n)(x)$ により定義すれば、

$$H(x,0)=(f\oplus E^n)(g\oplus E^n)(x)=(fg\oplus E^n)\ ,\ H(x,1)=(f\oplus E^n)(E^n\oplus g)(x)=f\oplus g(x)$$

となるので、$fg\oplus E^n\simeq f\oplus g$

□

Remmark 0.1.4

Lemma 0.1.3 において特に $n = 1$ のとき、$fg = f \otimes g$ となる。ただし、$f \otimes g(x) = f(x) \otimes g(x)$ である。

Corollary 0.1.5

H を $S^2 = \mathbf{C}P^1$ 上の標準的な複素直線束（canonical line bundle）とする。このとき、$H \in [S^2, BU(1)] = [S^1, U(1)]$ と考えると、Lemma 0.1.3 と Remmark 0.1.4 により、$H \otimes H \oplus 1 \cong H \otimes H$ となる。$K(S^2)$ において、$H^2 + 1 = 2H$ であり、$(H-1)^2 = 0$ と考えられる。よって、環準同型

$$\alpha : \mathbf{Z}[H]/(H-1)^2 \longrightarrow K(S^2)$$

が得られるが、定義域は H の $\mathbf{Z}$ 係数の形式的べき級数環で $(H-1)^2$ で生成されるイデアルで商を取ったものである。

Allen Hatcher は論文の中で１０ページ以上にわたって次の同型を示しているが、残念ながら省略させていただきたい。

Theorem 0.1.6

$$\beta : K(X) \otimes \mathbf{Z}[H]/(H-1)^2 \xrightarrow{1 \otimes \alpha} K(X) \otimes K(S^2) \xrightarrow{\mu} K(X \times S^2)$$

は環同型である。

特に $X = *$ とすれば、$\alpha : \mathbf{Z}[H]/(H-1)^2 \longrightarrow K(S^2)$ が環同型であることがわかる。よって、external product

$$\mu : K(X) \otimes K(S^2) \longrightarrow K(X \times S^2)$$

が同型である。

Remmark 0.1.7

$H^2 = 2H - 1$ であるので、$\mathbf{Z}[H]/(H-1)^2 = K(S^2)$ は $\{1, H\}$ で生成される自由アーベル群であり、$\widetilde{K}(X) = \mathrm{Ker}(K(X) \longrightarrow K(*))$ であったので、$K(S^2) \longrightarrow K(*)$ の対応は $aH + b \mapsto a + b$ と考えられ、

$$\widetilde{K}(S^2) = \{aH + b \in K(S^2) \mid a + b = 0\ \} = \{a(H-1) \in K(S^2)\}$$

であるため、$\widetilde{K}(S^2)$ は $(H-1)$ のみで生成される自由アーベル群である。

Proposition 0.1.8

(X, A) を有限複体対とするとその cofiber sequence

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X/A$$

を考える。つまり、i は inclusion であり、p は projection である。このとき、

$$\widetilde{K}(X/A) \xrightarrow{p^*} \widetilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(A)$$

は exact である。

proof)　　homotopy equivalence である。$BU \longrightarrow \Omega SU$ が存在する。

X/A も有限複体である。これより、

$$\widetilde{K}(X/A) \xrightarrow{p^*} \widetilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(A)$$

をホモトピー集合に変換して考えれば、

$$\begin{CD}
\widetilde{K}(X/A) @>{p^*}>> \widetilde{K}(X) @>{i^*}>> \widetilde{K}(A)\\
@V{\cong}VV @V{\cong}VV @VV{\cong}V\\
[X/A, BU] @>{p^*}>> [X, BU] @>{i^*}>> [A, BU]\\
@V{\cong}VV @V{\cong}VV @VV{\cong}V\\
[X/A, \Omega SU] @>{p^*}>> [X, \Omega SU] @>{i^*}>> [A, \Omega SU]\\
@V{\cong}VV @V{\cong}VV @VV{\cong}V\\
[\Sigma(X/A), SU] @>{\Sigma p^*}>> [\Sigma X, SU] @>{\Sigma i^*}>> [\Sigma A, SU]
\end{CD}$$

の可換図で下列は完全列になる。

□

homotopy equivalence である $BU \longrightarrow \Omega SU$ の構成については河野・玉木の「一般コホモロジー論」に書いてある。Allen Hatcher はきちんと元を取って $\mathrm{Ker} i^* = \mathrm{Im} p^*$ を示しているが、結構面倒そう。

Lemma 0.1.9

A, B : 有限複体ならば、$\widetilde{K}(A \vee B) \cong \widetilde{K}(A) \oplus \widetilde{K}(B)$

proof) $\widetilde{K}(A \vee B) \cong [A \vee B, BU] \cong [A, BU] \oplus [B, BU] \cong \widetilde{K}(A) \oplus \widetilde{K}(B)$

□

Theorem 0.1.10

有限複体 X に対し、自然な同型 $\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(S^2) \cong \widetilde{K}(\Sigma^2 X)$ が存在する。

proof) Y を有限複体とする。Prop 0.1.8 $(X \times Y, X \vee Y)$ の exact sequence を考えると、

$$\widetilde{K}(X \wedge Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X \times Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X \vee Y) \cong \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y)$$

が exact であるが、$p_1^* + p_2^* : \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X \times Y)$ を考えれば、この完全列は split するので、

$$\widetilde{K}(X \times Y) \cong \widetilde{K}(X \wedge Y) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y)$$

また、$K(X) \cong \widetilde{K}(X) \oplus \mathbf{Z}$ であったことも思い出すと、

$$\begin{tikzcd}
K(X) \otimes K(Y) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mu"'] & (\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y)) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \oplus \mathbf{Z} \arrow[d, "\tilde{\mu} \oplus 1"] \\
K(X \times Y) \arrow[r, "\cong"'] & \widetilde{K}(X \wedge Y) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \oplus \mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

は可換になり、$Y = S^2$ のとき、μ は同型であった。よって、$\tilde{\mu}$ も同型である。

□

Theorem 0.1.11 (*Bott Periodicity Thorem*)

X を有限複体とする。$\beta : \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(\Sigma^2 X)$ を $\beta(a) = (H - 1) * a$ により定義する。ただし、$H \in \widetilde{K}(S^2)$ は $S^2 = \mathbf{C}P^1$ 上の canonical line bundle である。このとき、β は同型である。

proof) $\beta : \widetilde{K}(X) \xrightarrow{\gamma} \widetilde{K}(S^2) \otimes \widetilde{K}(X) \xrightarrow{\tilde{\mu}} \widetilde{K}\Sigma^2 X$ という分解を考える。ただし、$\gamma(a) = (H-1) \otimes a$ である。このとき、$\widetilde{K}(S^2)$ は一元生成の自由アーベル群なので、$\widetilde{K}(S^2) \cong \mathbf{Z}$ であり、γ は同型となる。Theorem 0.1.10 により $\tilde{\mu}$ も同型だったので、β も同型である。

□

Corollary 0.1.12

$\widetilde{K}(S^{2n+1}) \cong 0$ であり、$\widetilde{K}(S^{2n}) \cong \mathbf{Z}$ であり、その生成元は $(H-1) * (H-1) * \cdots * (H-1)$ である。

proof) U は弧状連結であるので、$\widetilde{K}(S^1) \cong [S^1, BU] \cong [S^0, U] = 0$ であるので、あとは Bott 周期性定理を使えばよい。後半の主張も Bott 周期性定理を用いればよい。

□

Remmark 0.1.13

$\pi_{2n+1}(U) \cong \mathbf{Z}$, $\pi_{2n}(U) = 0$

Bott 周期性定理を用いて新たな cohomology theory を構成できる。

Definition 0.1.14

$n \geqq 0$ とし、$\widetilde{K}^{-n}(X) = \widetilde{K}(\Sigma^n X)$ とおく。ただし、$\widetilde{K}^0(X) = \widetilde{K}(X)$ である。また正の次元においては、$\widetilde{K}^{2n}(X) = \widetilde{K}(X)$, $\widetilde{K}^{2n-1}(X) = \widetilde{K}(\Sigma X)$ と定義する。

$$\widetilde{K}^* : \mathbf{TOP} \longrightarrow \mathbf{Graduated\ Abelian\ Group}$$

は反変関手（contravariant fanctor）である。ただし morphism 対応は次元が偶数のとき、$f^* : \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(Y)$ で、奇数のときは $(\Sigma f)^* : \widetilde{K}(\Sigma X) \longrightarrow \widetilde{K}(\Sigma Y)$ である。

Theorem 0.1.15

$$\widetilde{K}^* : \mathbf{Finite\ Cell\ Complex} \longrightarrow \mathbf{Graduated\ Abelian\ Group}$$

は general reduced cohomology theory である。

proof) cohomology theory における次元公理以外を確かめればよい。

- exactness axiom-

(X,A) に対し、Prop 0.1.8 の続きを考えれば、

$$\widetilde{K}(\Sigma^2 A) \to \widetilde{K}(\Sigma(X/A)) \to \widetilde{K}(\Sigma X) \to \widetilde{K}(\Sigma A) \to \widetilde{K}(X/A) \to \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A)$$

の完全列があるので、定義に従って書き直せば、

$$\widetilde{K}^{-2}(A) \to \widetilde{K}^{-1}(X/A) \to \widetilde{K}^{-1}(X) \to \widetilde{K}^0(\Sigma A) \to \widetilde{K}^0(X/A) \to \widetilde{K}^0(X) \to \widetilde{K}(A)$$

であるが、ここで、Bott の周期性定理により $\widetilde{K}^{-2}(A) = \widetilde{K}(\Sigma^2 A) \cong \widetilde{K}(A) = K^0(A)$ となり、この完全列は loop を繰り返す。つまり、

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}^0(X/A) \arrow[r] & \widetilde{K}^0(X) \arrow[r] & \widetilde{K}^0(A) \arrow[d] \\
\widetilde{K}^1(A) \arrow[u] & \widetilde{K}^1(X) \arrow[l] & \widetilde{K}^1(X/A) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

といった具合である。なので、$\widetilde{K}^*$ の定義から、長い完全列が存在する。

- suspension axiom-

$\widetilde{K}^*$ の定義と Bott 周期性定理を用いれば成立する。

- additivity axiom-

$\widetilde{K}(\bigvee X_\lambda) \cong [\bigvee X_\lambda, BU] \cong \prod_\lambda [X_\lambda, BU] \cong \prod_\lambda \widetilde{K}(X_\lambda)$ であり、$\Sigma(\bigvee X) \cong \bigvee(\Sigma X_\lambda)$ であることを考えれば成立する。

- homotopy axiom-

$\widetilde{K}(X) \cong [X, BU]$ であるから成り立つ。

□

Definition 0.1.16

reduced ではない対空間の cohomology theory も考えられるので、CW 複体対の場合には $K^*(X,A) = \widetilde{K}^*(X/A)$ とおけばよかった。これにより、K^* は cohomology theory となる。

これら K^*、$\widetilde{K}^*$ を複素 K-theory と呼ぶ。