0.1　分類写像

ベクトル束を fiber bundle の言葉で説明するならば、ベクトル束とは、線形変換群 $GL(p^{-1}(b)) \cong GL(\mathbf{R}^n)$ を構造群とする $\mathbf{R}^n$ を fiber とした fiber bundle である。

Remmark 0.1.1

ξ が Riemman 計量を持つとき、$p^{-1}(b)$ の一次独立な n 個のベクトルを正規直交化して基底を得る。このとき、線形写像 $f : p^{-1}(b) \longrightarrow p^{-1}(b)$ は内積を保つので、f は直交群と考えられる。よって、ξ の構造群は $O(n)$ にまで reduce できる。

Fact 0.1.2

位相群 G の F に対する作用を $\mu : G \times F \longrightarrow F$ とし、$\mathrm{ad}(\mu) : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$ が単射であるとする。このとき、

$P_G(X) = \{X$ を底空間とした主 G 束の同型類$\} \longrightarrow \{X$ を底空間とした $G{-}F$ 束の同型類$\}$

を $\xi = (E \longrightarrow X) \mapsto \xi_F = (E \times_G F \longrightarrow X)$ で定義するとこれは全単射である。

Theorem 0.1.3

X を CW 複体とすると、$\mathrm{Vect}^n(X) \cong [X, BO(n)]$ である。

proof)　X は paracompact Hausdorff であるので、$\xi = (E, p, B)$ は Riemann 計量を持つ。よって、Remmark 0.1.1 により ξ は $O(n) - \mathbf{R}^n$ 束 である。$O(n) \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を $(A, v) \mapsto Av$ とすればこれは作用となり、$O(n) \longrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbf{R}^n)$ は単射である。なぜなら、$A \in O(n)$ に対し、$\mathrm{ad}(A) : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を恒等写像とする。任意の $v \in \mathbf{R}^n$ に対し、$Av = v$ なので、$A = E$ である。よって Fact 0.1.2 により、

$$\mathrm{Vect}^n(X) \cong P_{O(n)}(X)$$

である。さらに、普遍 $O(n)$ 束 $EO(n) \longrightarrow BO(n)$ が存在する事を考慮すれば、X が CW 複体なのでファイバー束の分類定理により、

$$P_{O(n)}(X) \cong [X, BO(n)]$$

が成り立つので、題意が示される。

□

Definition 0.1.4

Theorem 0.1.3 において、CW 複体 X を底空間とした n 次ベクトル束 ξ の同型類に対し、$\mu : X \longrightarrow BO(n)$ が homotopic を除いて一意に存在する。μ を ξ の分類写像と呼ぶ。また、Grassmann 多様体の節で構成した普遍 $O(n)$ 束 $EO(n) \longrightarrow BO(n)$ に同伴する $BO(n)$ を底空間とするベクトル束を ξ_n とおく。また、$\xi_n \times \xi_m$ は $BO(n) \times BO(m)$ を底空間とした $n+m$ 次元ベクトル束なのでこの分類写像を、

$$\mu_{n,m} : BO(n) \times BO(m) \longrightarrow BO(n+m)$$

とおく。

この分類写像について少し見ていく。

Lemma 0.1.5

次の図式は homotopy 可換である。

$$\begin{tikzcd}
O(n) \times O(n) \arrow[r, "\mu_{n,n}"] \arrow[d, "i\times i"'] & O(2n) \arrow[d, "j"] \\
O(n+1) \times O(n+1) \arrow[r, "\mu_{n+1,n+1}"'] & O(2n+2)
\end{tikzcd}$$

ただし、縦列は inclusion である。

proof)　　$j \circ \mu_{n,n} : BO(n) \times BO(n) \longrightarrow BO(2n+2)$ の pull back を考えると、

$$\begin{tikzcd}
(EO(n) \times EO(n)) \oplus \varepsilon^2 \arrow[r] \arrow[d] & EO(2n) \oplus \varepsilon^2 \arrow[r] \arrow[d] & EO(2n+2) \arrow[d] \\
BO(n) \times BO(n) \arrow[r, "\mu_{n,n}"'] & BO(2n) \arrow[r, "j"'] & BO(2n+2)
\end{tikzcd}$$

であり、さらに $\mu_{n+1,n+1} \circ (i \times i)$ の pull back は、$(EO(n) \oplus \varepsilon^1) \times (EO(n) \oplus \varepsilon^1)$ であるため、$(j \circ \mu_{n,n})^* \cong (\mu_{n+1,n+1} \circ (i \times i))^*$ となり、分類定理から $j \circ \mu_{n,n} \simeq \mu_{n+1,n+1} \circ (i \times i)$ である。

□

Theorem 0.1.6

$\mu = \mathrm{colim}_n \mu_{n,n} : BO \times BO \longrightarrow BO$ により、BO は可換な H-space である。

proof)

$$\begin{tikzcd} BO(n_1) \times BO(n_2) \times BO(n_3) \arrow[r, "1\times\mu_{n_2,n_3}"] \arrow[d, "\mu_{n_1,n_2}\times 1"'] & BO(n_1) \times BO(n_2+n_3) \arrow[d, "\mu_{n_1,n_2+n_3}"] \\ BO(n_1+n_2) \times BO(n_3) \arrow[r, "\mu_{n_1+n_2,n_3}"'] & BO(n_1+n_2+n_3) \end{tikzcd}$$

が homotopy 可換であるのは、$\xi_{n_1} \times (\xi_{n_2} \times \xi_{n_3}) \cong (\xi_{n_1} \times \xi_{n_2}) \times \xi_{n_3}$ であることから示せる。よって、μ の結合性は良い。また、$* \in BO$ を $* = BO(0) \subset BO$ と考えれば、これが単位元であり、さらに $\xi_n : EO(n) \longrightarrow BO(n)$ で、$BO(n)$ が paracompact Hausdorff であるから m 次ベクトル束 $\xi : E \longrightarrow BO(n)$ が存在し、$\xi_n \oplus \xi \cong \varepsilon^{n+m}$ となる。このとき、ξ の分類写像 $BO(n) \longrightarrow BO(m)$ から導かれる写像 $\nu : BO \longrightarrow BO$ がホモトピー逆元を定める。

□

Proposition 0.1.7

X を CW 複体とするとき、Thorem 0.1.3 に同型に対し次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd} {[X, BO(n)]} \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\cong"'] & {[X, BO(n+1)]} \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{Vect}^n(X) \arrow[r, "i"'] & \mathrm{Vect}^{n+1}(X) \end{tikzcd}$$

ただし、$i : \mathrm{Vect}^n(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}^{n+1}(X)$ は、$i[\xi] = [\xi \oplus \varepsilon^1]$ とし、
$j : BO(n) \longrightarrow BO(n+1)$ は $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる写像である。

proof)　$\mu : X \longrightarrow BO(n)$ を考え、$\mu^* = \xi$ とする。よって、

$$(j \circ \mu)^* = \mu^* \circ j^*(EO(n+1)) = \mu^*(EO(n) \oplus \varepsilon^1) = \xi \oplus \varepsilon^1$$

となり可換であることがわかる。

□

Remmark 0.1.8

$\mathrm{colim}_n \mathrm{Vect}^n(X) \cong [X, BO]$ が誘導されるが、$\mathrm{colim}_n \mathrm{Vect}^n(X)$ の同値関係を考えると、これは安定同値であるため、$\widetilde{K}(X)$ に他ならない。よって、$\widetilde{K}(X) \cong [X, BO]$

$K(X)$ においては次のような同型がある。

Theorem 0.1.9

X が CW 複体の時、$K(X) \longrightarrow [X, BO \times \mathbf{Z}]$ を、$\xi - \varepsilon^n$ に対し、$f : X \longrightarrow BO \times \mathbf{Z}$ を ξ の分類写像を μ とすると $f(x) = (\mu(x), \dim \xi - n)$ で定義すればこれは全単射である。

Proposition 0.1.10

X が有限複体のとき Theorem 0.1.6 により、$[X, BO]$ は可換群となるため、$\widetilde{K}(X) \cong [X, BO]$ はアーベル群として同型である。

proof)　次の図式、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Vect}^n(X) \oplus \mathrm{Vect}^m(X) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dd, "\oplus"'] & {[X, BO(n)] \times [X, BO(m)]} \arrow[d, "\cong"] \\
 & {[X, BO(n) \times BO(m)]} \arrow[d, "(\mu_{n,m})_*"] \\
\mathrm{Vect}^{n+m}(X) \arrow[r, "\cong"'] & {[X, BO(n+m)]}
\end{tikzcd}$$

が可換になるため。

□

Remmark 0.1.11

$[X, BO \times \mathbf{Z}]$ も BO の積を用いて可換群となり、$K(X) \cong [X, BO \times \mathbf{Z}]$ はアーベル群として同型である。