## 0.1 Grassmann 多様体

### Definition 0.1.1

$O(n) \longrightarrow O(n+k)$ を、$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_k \end{pmatrix}$ で定義し、$O(n)$ を $O(n+k)$ の部分群とみなす。

$$S_k(\mathbf{R}^n) = O(n+k)/O(n)$$

で定義し、スティフェル多様体 (stiefel manifold) と呼ぶ。

### Example 0.1.2

$S_1(\mathbf{R}^n) = O(n+1)/O(n) \cong S^n$

### Lemma 0.1.3

位相群 $G$ とその閉部分群 $H$ に対し、射影 $G \longrightarrow G/H$ が主 $H$ 束のとき、$H$ の任意の部分群 $K$ に対し誘導される写像

$$G/K \longrightarrow G/H$$

は $H/K$ を fiber とする fiber bundle である。

proof) $H \times H/K \longrightarrow H/K$ を、$(h, [h']) \mapsto [hh']$ で定義すればこれは作用となる。よって、主 $H$ 束の $G \longrightarrow G/H$ から、fiber が $H/K$ で構造群が $H$ の fiber bundle $G \times_H H/K \longrightarrow G/H$ が構成できる。さらに $f : G \times_H H/K \longrightarrow G/K$ を、$f(g, [h]) = [gh]$ で定義すればこれは同相になり、

$$\begin{tikzcd} G \times_H H/K \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G/K \arrow[d] \\ G/H \arrow[r, "="'] & G/H \end{tikzcd}$$

が可換となる。

□

### Proposition 0.1.4

任意の $k, n$ に対し、$S_k(\mathbf{R}^n)$ は $(n-1)$-connected である。

proof)　　$k=1$ のときは、$S_1(\mathbf{R}^n) \cong S^n$ は $(n-1)$-connected である。以下、$k$ に対する帰納的に考える。今任意の $n$ に対し、$S_k(\mathbf{R}^n)$ が $(n-1)$-connected と仮定する。このとき、射影 $O(n+k+1) \longrightarrow O(n+k+1)/O(n+1) = S_k(\mathbf{R}^{n+1})$ は主 $O(n+1)$ 束である。よって、Lemma 0.1.3 により、

$$S_{k+1}(\mathbf{R}^n) = O(n+k+1)/O(n) \longrightarrow O(n+k+1)/O(n+1) = S_k(\mathbf{R}^{n+1})$$

は $O(n+1)/O(n) \cong S^n$ を fiber とする fiber bundle である。よって、ホモトピー群の完全列を用いて、

$$\pi_m(S^n) \longrightarrow \pi_m(S_{k+1}(\mathbf{R}^n)) \longrightarrow \pi_m(S_k(\mathbf{R}^{n+1}))$$

の完全列を取り出すと、$m \leqq n-1$ に対し、仮定から、$\pi_m(S^n) = \pi_m(S_k(\mathbf{R}^{n+1})) = 0$ なので、$\pi_m(S_{k+1}(\mathbf{R}^n)) = 0$ が言える。

$\square$

## Definition 0.1.5

包含写像 $O(n+k) \longrightarrow O(n+k+1)$ から、$S_k(\mathbf{R}^n) \longrightarrow S_k(\mathbf{R}^{n+1})$ が誘導され、

$$S_k(\mathbf{R}^n) \longrightarrow S_k(\mathbf{R}^{n+1}) \longrightarrow S_k(\mathbf{R}^{n+2}) \longrightarrow \cdots$$

の列が構成できるので、$EO(k) = \mathrm{colim}_n S_k(\mathbf{R}^n)$ により定義する。

## Corollary 0.1.6

任意の $k$ に対し、$EO(k)$ は $\infty$-connected である。

## Definition 0.1.7

$O(n) \times O(k) \longrightarrow O(n+k)$ を、$(A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ により、$O(n) \times O(k)$ を $O(n+k)$ の部分群と見なす。

$$G_k(\mathbf{R}^n) = O(n+k)/O(n) \times O(k)$$

により定義し、グラスマン多様体（Grassmanni manifold）と呼ぶ。

## Example 0.1.8

$G_1(\mathbf{R}^n) = O(n+1)/O(n) \times O(1) \cong S^n/S^0 \cong \mathbf{R}P^n$

## Remmark 0.1.9

$G_k(\mathbf{R}^n)$ は $O(n)$ の構造から compact な多様体である。

## Theorem 0.1.10

射影 $S_k(\mathbf{R}^n) \longrightarrow G_k(\mathbf{R}^n)$ は主 $O(k)$ 束である。

## Definition 0.1.11

包含写像 $O(n+k) \longrightarrow O(n+k+1)$ から、$G_k(\mathbf{R}^n) \longrightarrow G_k(\mathbf{R}^{n+1})$ が誘導され、

$$G_k(\mathbf{R}^n) \longrightarrow G_k(\mathbf{R}^{n+1}) \longrightarrow G_k(\mathbf{R}^{n+2}) \longrightarrow \cdots$$

の列が構成できるので、$BO(k) = \mathrm{colim}_n G_k(\mathbf{R}^n)$ により定義する。

## Remmark 0.1.12

compact Hausdorff 空間列の colimit は paracompact Hausdorff 空間であるので、$BO(k)$ は paracompact Hausdorff 空間である。

## Theorem 0.1.13

射影 $EO(k) \longrightarrow BO(k)$ は普遍 $O(k)$ 束である。これは良く使う普遍束なので、これを標準的な普遍 $O(k)$ 束と呼んだりする。

ファイバー束の分類定理を用いれば次の定理が成り立つ。

## Theorem 0.1.14

$X$ を CW 複体とするとき、pull back による対応 $[X, BO(k)] \longrightarrow P_{O(k)}(X)$ は全単射である。

## Corollary 0.1.15

$G$ を $O(k)$ の閉部分群とする。このとき、

$$BG = \bigcup_{n=1} O(n+k)/O(n) \times G = EO(k)/G$$

と置けば、$EO(k) \longrightarrow BG$ は普遍 $G$ 束である。

よって、$O(k)$ の閉部分群についてはファイバー束の分類定理が成り立つ。より一般の場合については別にある。

### Theorem 0.1.16

$G$ を $O(k)$ の閉部分群としたとき、

$$[X, BG] \longrightarrow P_G(X)$$

は全単射である。