Definition 0.0.1

$\xi = (E, p, B)$ を n 次ベクトル束とする。$\xi \oplus \xi$ の全空間 $E \times E$ に対し、連続写像

$$\mu : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$$

が、$^\forall b \in B$ に対し、

$$\mu|_{p^{-1} \times p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \times p^{-1}(b) \longrightarrow \mathbf{R}$$

がベクトル空間である $p^{-1}(b)$ の内積となるとき、μ を Riemann 計量と呼ぶ。また、$\mathbf{R}$ を $\mathbf{C}$ に取り替えたとき Hermite 計量と呼ぶ。

Theorem 0.0.2

$\xi = (E, p, B)$ を計量 μ を持つ 1 次元ベクトル束とする。$\xi \otimes \xi (\xi \otimes \bar{\xi})$ は自明束と同型である。

proof)　　束写像 $f : \xi \otimes \xi \longrightarrow \varepsilon^1$ を、$e \otimes e' \in p^{-1}(b) \otimes p^{-1}(b)$ に対し、$f(e \otimes e') = (b, \mu(e, e'))$ で定義する。f を各ファイバーに制限すれば、$(b, x) \in B \times \mathbf{R}$ に対し、$p^{-1}(b)$ の長さ 1 のベクトル $v \in p^{-1}(b)$ をとり、$(xv, v) \in p^{-1}(b) \times p^{-1}(b)$ に対し、$f(xv, v) = (b, \mu(xv, v)) = (b, x\mu(v, v)) = (b, x)$ より全射。さらに、$\mu(e, e') = 0$ ならば、$e \otimes e' = 0$ であるので単射にもなる。

$\square$

Theorem 0.0.3

n 次ベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ で B が compact Hausdorff 空間ならば、ξ は計量をもつ。

proof)　　B は compact なので、B の座標近傍 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から有限個の開被覆 $U_1, U_2, \cdots, U_m$ が選べ、$\varphi_j : p^{-1}(U_j) \longrightarrow U_j \times \mathbf{R}^n \quad (1 \leqq j \leqq m)$ を局所自明化とする。B は正規空間なのでウリゾーンの補題から、B の開被覆 $\{V_1, V_2, \cdots V_m\}$ と、$\{W_1, W_2, \cdots W_m\}$ が存在し、$W_j \subset \overline{W_j} \subset V_j \subset \overline{V_j} \subset U_j$ を見たし、$\lambda_j : B \longrightarrow I$ で、

$$\lambda_j(\overline{W_j}) = 1 \ , \ \lambda_j(B - V_j) = 0$$

を満たすものが存在する。このとき、

$$\chi_j : p^{-1}(U_j) \xrightarrow{\varphi_j} U_j \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

とし、$h_j : E \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を、

$$h_j(e) = \begin{cases} 0 & e \notin p^{-1}(V_j) \\ \lambda_j(p(e))\chi_j(e) & e \in p^{-1}(U_j) \end{cases}$$

で定義すれば h_j は連続である。さらに、$h : E \longrightarrow \mathbf{R}^{nm}$ を、

$$h(e) = (h_1(e), h_2(e), \cdots, h_n(e))$$

で定義する。h_j は各 fiber に制限すると線形写像になるので、h もそうである。$\mathbf{R}^{nm}$ は内積を持つので、これを用いて、$\mu : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ を、$\mu(e, e') = h(e) \cdot h(e')$ により定義する。これにより μ は内積となる。

□

Corollary 0.0.4

Theorem 0.0.3 の仮定において B を paracompact Hausdorff にしてもベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ は計量を持つ。

proof)　　最初の座標近傍を選ぶ時点で B は paracompact であるから、有限個とはいかないが可算個の開被覆を選ぶ事ができる。以下同様の議論を続ければ、μ を $\mathbf{R}^\infty$ の内積を利用して定義できる。

□

Definition 0.0.5

$\xi = (E, p, B)$ を n 次元ベクトル束とし、m 次ベクトル束 $\xi' = (E', p', B)$ が、$E' \subset E$ で各 $b \in B$ に対し、$p'^{-1}(b)$ が $p^{-1}(b)$ の線形部分空間であるとき、ξ' は ξ の部分束と呼ばれる。

Lemma 0.0.6

$\xi = (E, p, B)$ の部分束 $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$, $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ で、各 $b \in B$ に対し、$p_1^{-1}(b) \oplus p_2^{-1}(b) = p^{-1}(b)$ であれば、$\xi \cong \xi_1 \oplus \xi_2$ である。

proof)　　$f : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow E$ を、$f(e_1, e_2) = e_1 + e_2$ で定義すると、$f : \xi_1 \oplus \xi_2 \longrightarrow \xi$ は束同型となる。

□

Definition 0.0.7

$\xi = (E, p, B)$ を計量 μ を持つ n 次ベクトル束とし、

$$s_1, s_2, \cdots, s_r : B \longrightarrow E$$

を ξ の断面とする。ξ の底空間の各点 $b \in B$ に対し、

$$\mu(s_i(b), s_i(b)) = 1 \quad , \quad \mu(s_i(b), s_j(b)) = 0 \qquad (i \neq j)$$

が成り立つとき、$s_1, s_2, \cdots, s_r$ は μ に対して正規直交であるといわれる。

Definition 0.0.8

$\xi = (E, p, B)$ は計量 μ を持つ n 次元複素ベクトル束とし、$\xi_0 = (E_0, p_0, B)$ をその部分ベクトル束とする。$b \in B$ に対し、

$$p_1^{-1}(b) = \{\ e \in E \mid {}^{\forall}e' \in p_0^{-1}(b) \text{ に対し、} \mu(e, e') = 0\ \}$$

とすることにより、$\xi_0^{\perp} = (E_1, p_1, B)$ が定義されるが、これは ξ の部分ベクトル束である。これを ξ_0のξ における直交補束と呼ぶ。

Theorem 0.0.9

計量を持つベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ とその部分束 $\xi_0 = (E_0, p_0, B)$ に対し、$\xi \cong \xi_0 \oplus \xi_0^{\perp}$ である。

proof)　　$\xi_0^{\perp} = (E_1, p_1, B)$ とすれば、線形空間に置ける部分空間とその直交補空間の分解 $p^{-1}(b) = p_0^{-1}(b) \oplus p_1^{-1}(b)$ となるため Lemma 0.0.6 により成立。