0.1　分裂原理

Definition 0.1.1

複素 n 次ベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ に対し、ファイバー束 $\rho_\xi = (P, q, B, \mathbf{C}P^{n-1})$ を次のように定義する。$b \in B$ に対し、$q^{-1}(b)$ を n 次ベクトル空間 $p^{-1}(b)$ の一次元線形部分空間全体とする。さらに、$P = \bigcup_{b \in B} q^{-1}(b)$ とし、$\pi : E^0 \longrightarrow P$ を $e \in E^0$ に対し、$p^{-1}(p(e))$ の一次元線形部分空間全体を対応させるものとする。これは明らかに全射で、π による E^0 の商位相を P に与える。この ρ_ξ を ξ の付属射影ファイバー束と呼ぶ。

さらに、$q^*(\xi) = (E', p', P)$ を考えたとき、$E' = \{\ (e, l) \in E \times P \mid p(e) = q(l)\ \}$ であるが、その部分空間 $E_1 = \{\ (e, l) \in E' \mid e \in l\ \}$ とき、$p_1 = p'_{|_{E_1}}$ とすれば、

$$\gamma_\xi = (E_1, p_1, P)$$

は $q^*(\xi)$ の部分直線束である。

Lemma 0.1.2

複素 n 次ベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ に対し、付属ファイバー束 $\rho_\xi = (P, q, B, \mathbf{C}P^{n-1})$ と $q^*(\xi)$ の部分直線束 $\gamma_\xi = (E_1, p_1, P)$ と、標準直線束 $\gamma^1(\mathbf{C}^n) = (E', p', \mathbf{C}P^{n-1})$ を考えたとき、それらの Euler 類、$\chi(\gamma_\xi) \in H^2(P)$, $\chi(\gamma^1(\mathbf{C}^n)) \in H^2(\mathbf{C}P^{n-1})$ により、0 次準同型、

$$\theta : H^*(\mathbf{C}P^{n-1}) \longrightarrow H^*(P)$$

を、$\chi(\gamma^1(\mathbf{C}^n))^k \mapsto \chi(\gamma_\xi)^k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$ により定義する。このとき、任意の $b \in B$ に対し、inclusion からの誘導

$$j_b^* : H^*(P) \longrightarrow H^*(q^{-1}(b))$$

を考えると、$j_b^* \circ \theta$ は同型である。

proof)　　束写像 $f : \gamma^1(\mathbf{C}^n) \longrightarrow j_b^*(\gamma_\xi)$ で、底空間の写像が同相であるようなものが存在する。よって、

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p'"'] & j_b^*(\gamma_\xi) \arrow[r] \arrow[d] & E_1 \arrow[d, "p_1"] \\
\mathbf{C}P^{n-1} \arrow[r, "\cong", "g"'] & q^{-1}(b) \arrow[r, "j_b"'] & P
\end{tikzcd}$$

、

は可換となり、$g^*\circ j_b^*(\chi(\gamma_\xi)) = \chi(\gamma^1(\mathbf{C}^n))$ である。cup 積の性質から、$g^*\circ j_b^*(\chi(\gamma_\xi)^k) = \chi(\gamma^1(\mathbf{C}^n))^k$ であり、つまり、$g^*\circ j_b^*\circ\theta = 1$ が言えるため、g^* が同型であることを考えれば、$j_b^*\circ\theta$ も同型である。

□

Remmark 0.1.3

Lemma 0.1.2 により、ρ_ξ に Leray-Hirsch の定理を適用すると、

$$\Phi^* : H^*(B)\otimes H^*(\mathbf{C}P^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H^*(P)$$

が、$\Phi(\beta\otimes\chi(\gamma^1(\mathbf{C}^n))^k) = q^*(\beta)\chi(\gamma_\xi)^k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$ で与えられる。つまり、$\alpha \in H^*(P)$ をとると、

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} q^*(\beta_i)\chi(\gamma_\xi)^{n-i} \qquad (\beta_i \in H^*(B))$$

と一意に表せる。

Definition 0.1.4

$\xi = (E, p, B)$ を複素 n 次ベクトル束とする。位相空間 B_1 からの連続写像、$g : B_1 \longrightarrow B$ が次を満たすとき g を ξ の分解写像と呼ぶ。

1. $g^*(\xi)$ は n 個の複素直線束の Whitney 和に同型である。
2. 各 m に対し、$g^* : H^m(B) \longrightarrow H^m(B_1)$ は単射である。

Theorem 0.1.5

$\xi = (E, p, B)$ を複素 n 次元ベクトル束とし、B が paracompact Hausdorff 空間ならば、$g : B_1 \longrightarrow B$ で B_1 が paracompact Hausdorff であるような ξ の分解写像が存在する。

proof)　$n = 1$ のときは、恒等射 $B \longrightarrow B$ が求める分解写像である。よって、n に関する帰納法を用いる。$n-1$ まで定理を満たすとする。ξ の付属射影ファイバー束 $\rho_\xi = (P, q, B, \mathbf{C}P^{n-1})$ を考えると、B が paracompact Hausdorff で $\mathbf{C}P^{n-1}$ が compact Hausdorff であるので、P は paracompact Hausdorff である。よって、

$q^*(\xi) = (E', p', P)$ は P を底空間とするので Hermite 計量もち、部分直線束 γ_ξ^1 とその直交補束によって分解でき、

$$q^*(\xi) \cong \gamma_\xi^1 \oplus (\gamma_\xi^1)^\perp$$

となる。ここで $(\gamma_\xi^1)^\perp$ は複素 $n-1$ 次元ベクトル束であるので、帰納法の仮定から、paracompact Hasdorff 空間 B_1 と分解写像、$g_1 : B_1 \longrightarrow P$ が存在する。このとき、

$$g = q \circ g_1 : B_1 \longrightarrow B$$

とおくと、

$$g^*(\xi) = g_1^* \circ q^*(\xi) \cong g_1^*(\gamma_\xi^1 \oplus (\gamma_\xi^1)^\perp) \cong g_1^*(\gamma_\xi^1) \oplus g_1^*((\gamma_\xi^1)^\perp)$$

であるが、$g_1^*((\gamma_\xi^1)^\perp)$ は $n-1$ の複素直線束の whitney 和に同型であるから、$g^*(\xi)$ は n 個の複素直線側に同型である。また、$q^* : H^*(B) \longrightarrow H^*(P)$ を考えるとき、各 m に対し、

$$q^* : H^m(B) \cong H^m(B) \otimes H^0(\mathbf{C}P^{n-1}) \hookrightarrow (H^*(B) \otimes H^*(\mathbf{C}P^{n-1}))_m \cong H^m(P)$$

という合成であるので、q^* は単射である。仮定より、g_1^* も単射なので、$g^* = g_1^* \circ q^*$ は単射である。

□

Corollary 0.1.6

$\xi_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$ は paracompact Hausdorff 空間 B を底空間にもつ複素 n 次ベクトル束とする。このとき、paracompact Hausdorff 空間 B_1 からの写像 $g : B_1 \longrightarrow B$ で、$\xi_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ すべての分解写像であるものが存在する。

proof)　　$m = 1$ のときは、Theorem **??**で示した。よって m の帰納法で示す。$m-1$ まで定理が成り立つとすると、$\xi_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m-1)$ すべての分解写像となる、$g_1 : A_1 \longrightarrow B$ で A_1 が paracompact Hausdorff であるものが存在する。また、$g_1^*(\xi_m)$ は A_1 を底空間とする n 次ベクトル束であるから、Theorem **??**により、paracompact Hausodorff 空間 B_1 と分解写像 $g_2 : B_1 \longrightarrow A_1$ が存在する。よって、$g = g_1 \circ g_2 : B_1 \longrightarrow B$ を考えると、$1 \leqq i \leqq m-1$ に対しては、$g^*(\xi_i) = g_2^*(g_1^*(\xi_i))$ で $g_1^*(\xi_i)$ が n 個の直線束 whitney 和に同型となるので、$g^*(\xi_i)$ も同様である。また、$i = m$ の時は、$g^*(\xi_m) = g_2^*(g_1^*(\xi_m))$ で g_2 の定義から、これも同様である。また、g_1^*, g_2^* は単射だから $g^* = g_2^* \circ g_1^*$ も単射である。

□