0.1 K 群

空間 X 上のベクトル束全体の集合を $\mathrm{Vect}(X)$ とかき、その部分集合で n 次ベクトル束全体を $\mathrm{Vect}^n(X)$ とかく。特に実ベクトル、複素ベクトルを強調したいときには、$\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(X)$, $\mathrm{Vect}^n_{\mathbf{C}}(X)$ という具合に書く事にする。

Definition 0.1.1

$\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Vect}(X)$ に対し、$\xi_1 \cong_s \xi_2$ を、$^\exists n \in \mathbf{N} \quad \text{s.t} \quad \xi_1 \oplus \varepsilon^n \cong \xi_2 \oplus \varepsilon^n$ となるときと定義する。このとき、$\cong_s$ を安定同型 (stably isomorphic) と呼ぶ。明らかに $\xi_1 \cong_s \xi_2$ のとき、$\dim \xi_1 = \dim \xi_2$ である。

Lemma 0.1.2

$\cong_s$ は $\mathrm{Vect}(X)$ における同値関係である。

proof)　　$\xi \cong \xi \oplus \varepsilon^0$ なので、$\xi \cong_s \xi$ である。対称律は定義から単純に示される。また、$\xi_1 \cong_s \xi_2$, $\xi_2 \cong_s \xi_3$ とすると、$\xi_1 \oplus \varepsilon^n \cong \xi_2 \oplus \varepsilon^n$, $\xi_2 \oplus \varepsilon^m \cong \xi_3 \oplus \varepsilon^m$ とあらわせる。よって、

$$\xi_1 \oplus \varepsilon^{n+m} \cong \xi_1 \oplus \varepsilon^n \oplus \varepsilon^m \cong \xi_2 \oplus \varepsilon^n \oplus \varepsilon^m \cong \xi_3 \oplus \varepsilon^n \oplus \varepsilon^m \cong \xi_3 \oplus \varepsilon^{n+m}$$

であるため、$\xi_1 \cong_s \xi_3$

$\square$

安定同型と似た同値関係で次が定義できる。

Definition 0.1.3

$\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Vect}(X)$ に対し、$\xi_1 \simeq_s \xi_2$ を、$^\exists n, m \in \mathbf{N} \quad \text{s.t} \quad \xi_1 \oplus \varepsilon^n \cong \xi_2 \oplus \varepsilon^m$ となるときと定義する。このとき、ξ_1 と ξ_2 は安定同値（stably equivalence）であるという。これにより、異なる次元でのベクトル束の同値関係ができる。明らかに２つのベクトル束が同型ならば安定同型であり、安定同型なら安定同値であるがこの逆はいえない。

Lemma 0.1.4

$\simeq_s$ は $\mathrm{Vect}(X)$ における同値関係である。

proof)　　$\cong_s$ と同じくして示せる。

□

Proposition 0.1.5

X が compact Hausdorff 空間のとき、$\xi \in \mathrm{Vect}(X)$ に対し、$^\exists \xi' \in \mathrm{Vect}(X)$, $n \in \mathbf{N}$ s.t　$\xi \oplus \xi' \cong \varepsilon^n$

Theorem 0.1.6

$\widetilde{K}(X) = \mathrm{Vect}(X)/\simeq_s$ で定義する。このとき、$[\xi_1], [\xi_2] \in \widetilde{K}(X)$ に対し、

$$[\xi_1] \oplus [\xi_2] = [\xi_1 \oplus \xi_2] \quad , \quad [\xi_1] \otimes [\xi_2] = [\xi_1 \otimes \xi_2]$$

で定義する。X が compact Hausdorff のとき、$\widetilde{K}(X)$ は $\oplus$, $\otimes$ により可換環となる。

proof)　　半環になる事はベクトル束における $\oplus$, $\otimes$ の性質より導かれる。問題は $\oplus$ における逆元であるが、Prop 0.1.5 により、$\xi \in \mathrm{Vect}(X)$ に対し、$\xi' \in \mathrm{Vect}(X)$ が存在し、$\xi \oplus \xi' \cong \varepsilon^n \simeq_s \varepsilon^0$ となる。よって、$[\xi] \oplus [\xi'] = 0$ である。

□

Remmark 0.1.7

$\mathrm{Vect}(X)/\cong_s$ では上の証明における逆元の存在において、$\xi_1 \oplus \xi' \cong_s \varepsilon^0$ となるためには、ξ, ξ' の次元は 0 でなければならない。つまり、X が compact Hausdorff であっても一般に逆元の存在はいえない。

Definition 0.1.8

$\{\ \xi - \xi' \mid \xi, \xi' \in \mathrm{Vect}(X)\ \}$ を考える。もちろん $-$ は演算の意味ではなく symbolic なものである。つまり、$\mathrm{Vect}(X) \times \mathrm{Vect}(X)$ と考えられる。このとき、$\xi_1 - \xi_1'$, $\xi_2 - \xi_2'$ に対し、$\xi_1 - \xi_1' \sim \xi_2 - \xi_2'$ を、$\xi_1 \oplus \xi_2' \cong_s \xi_2 \oplus \xi_1'$ で定義する。これは同値関係となり、

$$K(X) = \{\ \xi - \xi' \mid \xi, \xi' \in \mathrm{Vect}(X)\ \}/\sim$$

で定義する。

Theorem 0.1.9

$[\xi_1 - \xi_1']$, $[\xi_2 - \xi_2'] \in K(X)$ に対し、

$[\xi_1-\xi_1']+[\xi_2-\xi_2'] = [\xi_1\oplus\xi_2-\xi_1'\oplus\xi_2']$, $[\xi_1-\xi_1']\times[\xi_2-\xi_2'] = [\xi_1\otimes\xi_2-\xi_1\otimes\xi_2']+[\xi_1'\otimes\xi_2'-\xi_1'\xi_2]$

で定義する。X が compact Hausdprff のとき、$K(X)$ は $+, \times$ により可換環となる。

proof)　　$+$ でアーベル群になる事は良いと思う。このときの単位元は $[\xi - \xi]$ であり、$[\xi - \xi']$ の逆元は $[\xi' - \xi]$ である。さらに、$\times$ に関して単位元は $[\varepsilon^1 - \varepsilon^0]$ で環構造をなす。

□

Remmark 0.1.10

$K(X)$ の任意の元は $\xi \in \mathrm{Vect}(X)$ と $n \in \mathbf{N}$ に対し、$[\xi - \varepsilon^n]$ とあらわせる。

proof)　　$[\xi_1 - \xi_2] \in K(X)$ に対し、$\xi_2 \oplus \xi_2' \cong \varepsilon^n$ となる ξ_2' が存在する。よって、$\xi = \xi_1 \oplus \xi_2'$ とおけば、

$$[\xi - \varepsilon^n] = [\xi_1 \oplus \xi_2' - \xi_2 \oplus \xi_2'] = [\xi_1 - \xi_2]$$

となる。

□

Remmark 0.1.11

K : Compact Hausdorff空間の圏 $\longrightarrow$ Ring は homotopy 不変な反変関手である。ただし、$f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$K(f) = f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$$

は $[\xi - \xi'] \in K(Y)$ に対し、$[f^*(\xi) - f^*(\xi')]$ を対応させるものとする。

proof)　　関手となることはベクトル束における pull-back の性質から導かれる。また、$f \simeq g$ においては $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$ であるので homotopy 不変性も示せる。

□

Remmark 0.1.12

$\widetilde{K}$: Compact Hausdorff空間の圏 $\longrightarrow$ Ring は homotopy 不変な反変関手である。ただし、$f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$\widetilde{K}(f) = f^* : \widetilde{K}(Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$$

は $[\xi] \in K(Y)$ に対し、$[f^*(\xi)]$ を対応させるものとする。

Theorem 0.1.13

$K(X) \cong \widetilde{K}(X) \oplus \mathbf{Z}$

proof) $\alpha : K(X) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$ を、$\alpha[\xi - \varepsilon^n] = [\xi]$ で定義すると、$[\xi - \varepsilon^n] = [\xi' - \varepsilon^m]$ のとき、$\xi \oplus \varepsilon^m \cong_s \xi' \oplus \varepsilon^n$ なので、$\xi \simeq_s \xi'$ がいえる。よって α は well defined であって準同型であることもわかる。さらに α は全射である。このとき、

$$\mathrm{Ker}\alpha = \{\ \varepsilon^m - \varepsilon^n \mid n, m \in \mathbf{Z}\} / \sim$$

であり、一方、$x_0 \in X$ に対して、$\{(x_0\}$ 上のベクトル束と言うのはすべて自明なので、$K(x_0) = \{\ \varepsilon^m - \varepsilon^n \mid n, m \in \mathbf{Z}\} / \sim = \mathrm{Ker}\alpha$ である。このとき、包含写像 $\mathrm{Ker}\alpha \longrightarrow K(X)$ は、$p : X \longrightarrow x_0$ から誘導される $p^* : K(x_0) \longrightarrow K(X)$ と等しい。これは、包含写像 $i : \{x_{0\}} \longrightarrow X$ において、$i^* \circ p^* = (p \circ i)^* = 1$ であるので、短完全列、

$$0 \longrightarrow K(x_0) \xrightarrow{p^*} K(X) \xrightarrow{\alpha} \widetilde{K}(X) \longrightarrow 0$$

は分解する。よって、$K(X) \cong \widetilde{K}(X) \oplus K(x_0)$ である。ところで、$K(x_0) \longrightarrow \mathbf{Z}$ を、$[\varepsilon^m - \varepsilon^n] \mapsto m - n$ で定義すれば、これが同型になっているのを確かめるのはたやすい。よって、$K(X) \cong \widetilde{K}(X) \oplus \mathbf{Z}$ を得る。

□

Corollary 0.1.14

基点つき空間 (X, x_0) に対し、$i^* : K(X) \longrightarrow K(x_0)$ を考えると、$\mathrm{Ker} i^* \cong \widetilde{K}(X)$

proof) $0 \longrightarrow K(x_0) \xrightarrow{p^*} K(X) \xrightarrow{\alpha} \widetilde{K}(X) \longrightarrow 0$ の分裂する短完全列において、$i^* \circ p^* = 1$ なのだから、

$$\widetilde{K}(X) \cong K(X)/\mathrm{Ker}\alpha = K(X)/\mathrm{Im} p^* = \mathrm{Coker} p^* \cong \mathrm{Ker} i^*$$

となる。ちなみに最後の同型は、$[x] \mapsto x - p^* \circ i^*(x)$ で与えられる。

□

この $K(X)$ と $\widetilde{K}(X)$ における一連の流れは、$H_*(X)$ と $\widetilde{H}_*(X)$ を思い起こす。$\widetilde{H}_*(X)$ も $H_*(X, x_0)$ と対空間のホモロジー群の一部だと考えた方が、何かと都合が良かった。よって、$\widetilde{K}(X)$ も基点を考え、$K(X)$ の部分群であると見なしたら話はスムーズである。よって、$\widetilde{K}$ を次のように捉える事もできる。

Remmark 0.1.15

$\widetilde{K}$: 基点つき Compact Hausdorff空間の圏 $\longrightarrow$ Ring は homotopy 不変な反変関手である。ただし、$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ に対し、

$$\widetilde{K}(f) : \widetilde{K}(Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$$

は $f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$ の制限で与えられている。