

0.1 Grothendick 群

前節の K 群のより一般的なアイデアを考える。

Definition 0.1.1

可換半群 A に対し、アーベル群 $K(A)$ と、準同型 $\alpha : A \rightarrow K(A)$ が与えられ、任意のアーベル群 G と準同型 $f : A \rightarrow G$ に対し、準同型

$$\tilde{f} : K(A) \rightarrow G$$

で $\tilde{f} \circ \alpha = f$ を満たすものが一意に存在するとき、 $K(A)$ を A の Grothendick 群とよぶ。

Remmark 0.1.2

A の Grothendick 群が存在すれば同型を除いて一意である。

proof) $K(A), K'(A)$ を A の Grothendick 群とし、

$$\alpha : K(A) \rightarrow K'(A) \quad , \quad \alpha' : K'(A) \rightarrow K(A)$$

とする。このとき、 $\tilde{\alpha} \circ \alpha' = \alpha$, $\tilde{\alpha}' \circ \alpha = \alpha'$ となる $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'$ が一意に存在する。よって、 $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\alpha}' \circ \alpha = \alpha$ となり、一意性から $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\alpha}' = 1$ であり、逆も同様である。

具体的な Grothendick 群の構成は次で考える。

Definition 0.1.3

A を可換半群とし、 $F(A)$ を A の自由加群とし、 A の演算を \oplus で表すとき、 $R(A)$ を $a \oplus b - a - b$ の元で生成される $F(A)$ の部分群とする。このとき、 $K(A) = F(A)/R(A)$ で定義する。

Proposition 0.1.4

上の定義による $K(A)$ は A の Grothendick 群である。

proof) $\alpha : A \rightarrow K(A)$ を $\alpha(a) = [a]$ で定義する。このとき任意のアーベル群 G と $f : A \rightarrow G$ に対し、 $\tilde{f} : K(A) \rightarrow G$ を、 $\tilde{f}[a] = f(a)$ で定義すればこれは明らかに準同型で、 $\tilde{f} \circ \alpha = f$ を満たす。一意性も簡単に示される。

Remark 0.1.5

A が可換半環のとき、同様の構成で $K(A)$ は可換環であることがわかる。

Remark 0.1.6

空間 X 上のベクトル束の同型類 $Vect(X)$ を考えればこれは可換半環であり、前節の構成を思い出せば $K(X) = K(Vect(X))$ である事がわかる。

Definition 0.1.7

A を可換半環とし、 $1 \in A$ をその単位元とする。このとき、

$$\lambda^k : A \longrightarrow A$$

で、

$$\lambda^0(x) = 1, \lambda^1(x) = x, \lambda^k(x+y) = \sum_{i+j=k} \lambda^i(x)\lambda^j(y)$$

を満たすとき、 A を λ 半環という。特に A が環のとき λ 環と呼ぶ。

Example 0.1.8

$Vect(X)$ において、 $\lambda^k(\xi) = \wedge^k \xi$ ($\wedge^0(\xi) = 1$) と定義すれば、これにより $Vect(X)$ は λ 半環である。