

0.1 複素数の Euler 類

実ベクトル束の特性類に関してはどうしても向きを勘案する必要があるが、複素ベクトル束に関してはそれを取っ払える。

Definition 0.1.1

V^n を複素 n 次ベクトル空間とする。このとき、 $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ であるので、 V^n のスカラー倍を \mathbf{R} に制限することにより、 V^n を実ベクトル空間 $V_{\mathbf{R}}^n$ と見ることができる。このとき、 (v_1, v_2, \dots, v_n) を V^n の基底とすると、

$$(v_1, v_1\sqrt{-1}, v_2, v_2\sqrt{-1}, \dots, v_n, v_n\sqrt{-1})$$

が $V_{\mathbf{R}}^n$ の基底となることは簡単に示せる。 $(v_1, v_2, \dots, v_n), (v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$ を V^n の基底とする。このとき、

$$v'_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} v_j \quad (z_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\sqrt{-1} \in \mathbf{C})$$

と一意で表せる。このとき、

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_1\sqrt{-1} \\ \dots \\ v'_n \\ v'_n\sqrt{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & \dots & a_{1n} & b_{1n} \\ -b_{11} & a_{11} & \dots & -b_{1n} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_{n1} & \dots & a_{nn} & b_{nn} \\ -b_{n1} & a_{n1} & \dots & -b_{nn} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1\sqrt{-1} \\ \dots \\ v_n \\ v_n\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

であるが、 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & \dots & a_{1n} & b_{1n} \\ -b_{11} & a_{11} & \dots & -b_{1n} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_{n1} & \dots & a_{nn} & b_{nn} \\ -b_{n1} & a_{n1} & \dots & -b_{nn} & a_{nn} \end{pmatrix}$

とおけば、 $\det A = |\det(z_{ij})|^2 > 0$ であるため、 $V_{\mathbf{R}}^n$ における順序付ける基底、

$$(v_1, v_1\sqrt{-1}, v_2, v_2\sqrt{-1}, \dots, v_n, v_n\sqrt{-1})$$

は、 (v_1, v_2, \dots, v_n) に関係なく向きが与えられる。 $V_{\mathbf{R}}^n$ には常にこの向きが与えられるものとする。

$\xi = (E, p, B)$ を複素 n 次ベクトル束とする。各、 $p^{-1}(b)$ は複素 n 次ベクトル空間なので、 $p^{-1}(b)_{\mathbb{R}}$ を考えることにより、 ξ を実 $2n$ ベクトル束と考えられる。これを $\xi_{\mathbb{R}}$ で表し、 ξ の実形と呼ぶ。

Lemma 0.1.2

複素 n 次ベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ の実形 $\xi_{\mathbb{R}}$ は向き付けられる。

proof) $b \in B$ に対し、その座標近傍、局所自明化を (U, φ) とする。つまり、 $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ である。 $\xi|_U$ の $2n$ 個の断面、 $s_1, s_2, \dots, s_n, s'_1, s'_2, \dots, s'_n$ を

$$s_i(b) = \varphi(b, e_i), \quad s'_i(b) = s_i(b)\sqrt{-1}$$

と定義する。ただし、 $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$ (i 番目だけ 1) の単位ベクトルとする。このとき、 $(s_1(b), s_2(b), \dots, s_n(b))$ は $p^{-1}(b)$ の基底になるので、

$$(s_1(b), s_2(b), \dots, s_n(b), s'_1(b), s'_2(b), \dots, s'_n(b))$$

は $p^{-1}(b)_{\mathbb{R}}$ の向きを表す順序付けられた基底となる。

Definition 0.1.3

$\xi = (E, p, B)$ は複素 n 次ベクトル束とする。このとき、 ξ の実形 $\xi_{\mathbb{R}}$ は向き付けられた実 $2n$ 次ベクトル束であるので、Thom 類 $w(\xi_{\mathbb{R}}) \in H^{2n}(E, E^0)$ と Euler 類 $\chi(\xi_{\mathbb{R}}) \in H^{2n}(B)$ が定まるが、これをそれぞれ $w(\xi), \chi(\xi)$ とかく。また射影空間のホモロジー群やコホモロジー群を見れば分かるのだが、複素のほうがスッキリしている。そういった意味もあってベクトル束では複素ベクトル束の方が扱いやすい。

射影空間のコホモロジー環はかなり重要である。射影空間のコホモロジー群に関しては、ホモロジー群と普遍係数定理を使えば同じような感じになるのはわかる。ただし、環としての構造となるともう少し深い議論になる。

Definition 0.1.4

係数 R の x に関する多項式環を $R[x]$ とおく。このとき、 x^n で生成されるイデアルによる商環を $R[x]/(x^n)$ と書く。つまり、 x^n の次数以上の多項式は存在しなくする。また x の次数を d とすることにより、 $R[x], R[x]/(x^n)$ は次数付の環となる。ただし、 $(R[x])_{md} = \{ rx^m \mid r \in R \}$ とし、それ以外は 0 とする。

Theorem 0.1.5

$$H^*(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1}), \quad H^*(\mathbf{R}P^\infty; \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2[\alpha]$$

ただし、 α の次数は 1。

$$H^*(\mathbf{C}P^n; R) \cong R[\alpha]/(\alpha^{n+1}), \quad H^*(\mathbf{C}P^\infty; R) \cong R[\alpha]$$

ただし、 α の次数は 2

proof) 実射影空間で示す。標準直線束 $\xi = (E, p, \mathbf{R}P^n)$ を考えると、 $E^0 \cong \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \simeq S^n$ であるので、Thom-Gysin 完全列を考え、 $\alpha = \chi(\xi) \in H^1(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2)$ とおくと、

$$\cdots \longrightarrow H^{m-1}(E^0; \mathbf{Z}_2) \longrightarrow H^{m-1}(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\cup\alpha} H^m(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \longrightarrow H^m(E^0; \mathbf{Z}_2) \longrightarrow \cdots$$

よって、 $1 < m < n - 1$ の範囲で $\cup\alpha$ が同型になる事はすぐにわかる。また、 $m = 1$ のときは、

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^0(E^0; \mathbf{Z}_2) \longrightarrow H^0(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\cup\alpha} H^1(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \longrightarrow 0$$

の完全列から $\cup\alpha$ が同型で、 $m = n$ のときは、

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\cup\alpha} H^n(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2)$$

の完全性、つまり $\cup\alpha$ の単射性と、 $H^n(E^0; \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2$, $H^n(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2$ を用いれば $\cup\alpha$ が同型となる。よって、 $\cup\alpha : H^{m-1}(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \longrightarrow H^m(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2)$ は $0 < m < n+1$ の範囲で同型となる。また、 m がこの範囲以外のときは $H^m(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) = 0$ であるので、求める結果を得る。複素射影空間にしても同様である。

上の証明で実射影空間の方だけ \mathbf{Z}_2 係数で考えるのは標準直線束に向きが付けられるかどうか定かでないためである。やはり複素ベクトル束の方が扱いやすい。よってここから複素ベクトル束についてその性質を考える。もちろん実数の場合には \mathbf{Z}_2 係数で考えれば同じことが成り立つ。複素ベクトルのオイラー類に対しても実ベクトル束のような性質が成り立つ。

Fact 0.1.6

ξ, ξ' を複素 n 次ベクトル束とし、 $f: \xi \rightarrow \xi'$ を束写像とし、その底空間の写像を g としたとき、 $\chi(\xi) = g^*(\chi(\xi'))$ である。特に $\xi \cong \xi'$ ならば、 $\chi(\xi) = \chi(\xi')$ であり、自明束に対しては $\chi(\varepsilon^n) = 0$ である。

Fact 0.1.7

ξ_1, ξ_2 を同じ底空間を持つ複素 m 次、 n 次ベクトル束としたとき、 $\chi(\xi_1 \oplus \xi_2) = \chi(\xi_1) \cup \chi(\xi_2)$ である。

Proposition 0.1.8

ξ_1, ξ_2 を同じ底空間 B を持つ複素直線束とする。 B が paracompact Hausdorff ならば、 $H^2(B)$ において、 $\chi(\xi_1 \otimes \xi_2) = \chi(\xi_1) + \chi(\xi_2)$ である。

proof) $g_1, g_2: B \rightarrow BU(1) = \mathbf{C}P^\infty$ をそれぞれ、 ξ_1, ξ_2 の分類写像とする。つまり、標準的な主 $U(1)$ 束 $EU(1) = S^\infty \rightarrow BU(1) = \mathbf{C}P^\infty$ に同伴するベクトル束 $\gamma = (E, p, \mathbf{C}P^\infty)$ としたとき、 $g_i^*(\gamma) \cong \xi_i$ ($i = 1, 2$) である。ここで、 $p_1, p_2: \mathbf{C}P^\infty \times \mathbf{C}P^\infty \rightarrow \mathbf{C}P^\infty$ をそれぞれ第一成分、第二成分への射影とする。このとき、 $p_1^*(\gamma) \otimes p_2^*(\gamma)$ の分類写像を、 $h: \mathbf{C}P^\infty \times \mathbf{C}P^\infty \rightarrow \mathbf{C}P^\infty$ とおく。つまり、 $h^*(\gamma) \cong p_1^*(\gamma) \otimes p_2^*(\gamma)$ である。ここで、 $g: B \rightarrow \mathbf{C}P^\infty$ を、

$$g: B \xrightarrow{d} B \times B \xrightarrow{g_1 \times g_2} \mathbf{C}P^\infty \times \mathbf{C}P^\infty \xrightarrow{h} \mathbf{C}P^\infty$$

で定義する。ただし、 $d: B \rightarrow B \times B$ は対角写像とする。

$$\begin{aligned} g^*(\gamma) &= (h \circ g_1 \times g_2 \circ d)^*(\gamma) \\ &= d^*(g_1 \times g_2)^* h^*(\gamma) \\ &= d^*(g_1 \times g_2)^*(p_1^*(\gamma) \otimes p_2^*(\gamma)) \\ &= d^* g_1^* p_1^*(\gamma) \otimes d^* g_2^* p_2^*(\gamma) \\ &= g_1^*(\gamma) \otimes g_2^*(\gamma) = \xi_1 \otimes \xi_2 \end{aligned}$$

よって、

$$\chi(\xi_1 \otimes \xi_2) = \chi(g^*(\gamma)) = g^*(\chi(\gamma)) = d^*(g_1 \times g_2)^* h^*(\chi(\gamma))$$

このとき、Kunneth の定理から

$$H^2(\mathbf{C}P^\infty \times \mathbf{C}P^\infty) \cong (H^0(\mathbf{C}P^\infty) \otimes H^2(\mathbf{C}P^\infty)) \oplus (H^2(\mathbf{C}P^\infty) \otimes H^0(\mathbf{C}P^\infty))$$

であるので、Prop 0.1.5 により、 $H^2(\mathbf{C}P^\infty \times \mathbf{C}P^\infty)$ は $\chi(\gamma) \times 1, 1 \times \chi(\gamma)$ で生成される自由加群である。 $i_1, i_2 : \mathbf{C}P^\infty \rightarrow \mathbf{C}P^\infty \times \mathbf{C}P^\infty$ をそれぞれの成分への inclusion とおくと、

$$i_1^* h^* \chi(\gamma) = \chi(i_1^* \circ h^*(\gamma)) = \chi(i_1^*(p_1^*(\gamma) \otimes p_2^*(\gamma))) = \chi(\gamma \otimes \varepsilon^1) = \chi(\gamma)$$

同様に、 $i_2^* h^*(\chi(\gamma)) = \chi(\gamma)$ であるので、

$$\begin{array}{ccc} & H^2(\mathbf{C}P^n) & \\ & \swarrow h^* & \searrow d \\ H^2(\mathbf{C}P^\infty \times \mathbf{C}P^\infty) & \xrightarrow[i_1^* \oplus i_2^*]{\cong} & H^2(\mathbf{C}P^\infty) \oplus H^2(\mathbf{C}P^\infty) \end{array}$$

は可換となり、一方、

$$i_1^* \oplus i_2^*(\chi(\gamma) \times 1 + 1 \times \chi(\gamma)) = (\chi(\gamma), 0) + (0, \chi(\gamma)) = (\chi(\gamma), \chi(\gamma)) = d(\chi(\gamma))$$

であるため、 $h^*(\chi(\gamma)) = \chi(\gamma) \times 1 + 1 \times \chi(\gamma)$ である。よって、cup 積とクロス積の関係を思い出せば、

$$\begin{aligned} \chi(\xi_1 \otimes \xi_2) &= d^*(g_1 \times g_2)^* h^*(\chi(\gamma)) \\ &= d^*(g_1 \times g_2)^*(\chi(\gamma) \times 1 + 1 \times \chi(\gamma)) \\ &= d^*(g_1 \times g_2)^*(\chi(\gamma) \times 1) + d^*(g_1 \times g_2)^*(1 \times \chi(\gamma)) \\ &= g_1^*(\chi(\gamma)) \cup g_2^*(1) + g_1^*(1) \cup g_2^*(\chi(\gamma)) \\ &= \chi(g_1^*(\gamma)) \cup 1 + 1 \cup \chi(g_2^*(\gamma)) = \chi(\xi_1) + \chi(\xi_2) \end{aligned}$$

となる。