

0.1 Euler 類

$\xi = (E, p, B)$ を向き付けられた n 次実ベクトル束に対し、Euler 類 $\chi(\xi) \in H^n(B)$ が定義される。

Proposition 0.1.1

$\xi = (E, p, B)$ を向き付けられた n 次ベクトル束とする。 ξ の Thom 類 $w(\xi) \in H^n(E, E^0)$ と、Thom 同型 $\phi^* : H^n(B) \rightarrow H^{2n}(E, E^0)$ に対し、 $\phi^*(\chi(\xi)) = w(\xi)^2$ となる。

proof) Thom 同型と Euler 類の定義を思い出せば、

$$\phi^*(\chi(\xi)) = p^*(\chi(\xi)) \cup w(\xi) = j^*(w(\xi)) \cup w(\xi) = w(\xi)^2$$

である。最後の等号は、cup 積の自然性、

$$\begin{array}{ccc} H^n(E, E^0) \otimes H^n(E, E^0) & \xrightarrow{\cup} & H^{2n}(E, E^0) \\ \downarrow j^* \otimes 1 & & \downarrow = \\ H^n(E) \otimes H^n(E, E^0) & \xrightarrow{\cup} & H^{2n}(E, E^0) \end{array}$$

により成り立つ。

Proposition 0.1.2

$\xi = (E, p, B)$ を向き付けられた n 次ベクトル束とする。 n が奇数の時、 $2\chi(\xi) = 0$ である。

proof) cup 積の可換性、 $\alpha \in H^n(X, X_1)$, $\beta \in H^m(X, X_2)$ に対し、

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{nm} \beta \cup \alpha \in H^{n+m}(X, X_1 \cup X_2)$$

であったことを思い出せば、 n が奇数ならば n^2 も奇数なので、

$$w(\xi)^2 = (-1)^{n^2} w(\xi)^2 = -w(\xi)^2$$

となり、 $2w(\xi)^2 = 0$ である。ここで Prop 0.1.1 を用いると、 $\phi^*(2\chi(\xi)) = 0$ となり、 ϕ^* は同型なのだから、 $2\chi(\xi) = 0$

Proposition 0.1.3

$\xi = (E, p, B), \xi' = (E', p', B')$ をともに向き付けられた n 次ベクトル束とし、 $f : \xi \rightarrow \xi'$ を向きを保つ束写像とする。この底空間の写像を $g : B \rightarrow B'$ としたとき、 $\chi(\xi) = g^*(\chi(\xi'))$ である。

proof) $b \in B$ に対し、 $w_b \in H^n(E_b, E_b^0)$ を ξ の向きから定まる生成元とし、 $g(b) \in B'$ に対し、 $w_{g(b)}' \in H^n(E_{g(b)}', E_{g(b)}'^0)$ を ξ' の向きから定まる生成元とする。 f は向きを保つので、

$$f^* : H^n(E_{g(b)}', E_{g(b)}'^0) \xrightarrow{\cong} H^n(E_b, E_b^0)$$

を考えると、 $f^*(w_{g(b)}') = w_b$ をみたく。このとき、

$$\begin{array}{ccc} H^n(E', E'^0) & \xrightarrow{j^*} & H^n(E_{g(b)}', E_{g(b)}'^0) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^n(E, E^0) & \xrightarrow{j^*} & H^n(E_b, E_b^0) \end{array}$$

の可換図を考えると、Thom 類 $w(\xi) \in H^n(E', E'^0)$, $w(\xi') \in H^n(E, E^0)$ に対し、

$$j^*(w(\xi)) = j^*(f^*(w(\xi'))) = w_b$$

となるわけだが、Thom 類の一意性から、 $w(\xi) = f^*(w(\xi'))$ が成り立つ。あとは、

$$\begin{array}{ccccc} H^n(E', E'^0) & \xrightarrow{j^*} & H^n(E') & \xleftarrow{\cong} & H^n(B') \\ f^* \downarrow & & f^* \downarrow & & \downarrow g^* \\ H^n(E, E^0) & \xrightarrow{j^*} & H^n(E) & \xleftarrow{\cong} & H^n(B) \end{array}$$

の可換図式で Euler 類の定義を考えれば、 $\chi(\xi) = g^*(\chi(\xi'))$ となる。

Corollary 0.1.4

向き付けられるベクトル束が $\xi \cong \xi'$ ならば、 $\chi(\xi) = \chi(\xi')$ である。

Corollary 0.1.5

向き付けられるベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ と、連続写像 $g : X \rightarrow B$ に対し、 $\chi(g^*(\xi)) = g^*(\chi(\xi))$

proof) $p^*(g) : g^*(\xi) \rightarrow \xi$ は向きを保つ束写像で底空間の写像は g であるので、Prop 0.1.3 $\chi(g^*(\xi)) = g^*(\chi(\xi))$ である。

Proposition 0.1.6

自明なベクトル束 $\varepsilon^n : B \times \mathbf{R}^n \rightarrow B$ に対し、 $\chi(\varepsilon^n) = 0$ である。

proof) $b \in B$ に対し、 $\varepsilon_b^n : \{b\} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \{b\}$ を自明束とする。

$$\begin{array}{ccc} B \times \mathbf{R}^n & \xrightarrow{p_b \times 1} & \{b\} \times \mathbf{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{p_b} & \{b\} \end{array}$$

は可換であり、 $(p_b \times 1, p_b) : (B \times \mathbf{R}^n, B) \rightarrow (\{b\} \times \mathbf{R}^n, \{b\})$ は束写像であることが分かる。よって、Prop 0.1.3 により、 $\chi(\varepsilon^n) = p_b^*(\chi(\varepsilon_b^n))$ である。しかし、 $\chi(\varepsilon_b^n) \in H^n(\{b\}) = 0$ であるので、 $\chi(\varepsilon^n) = 0$

Proposition 0.1.7

$\xi_1 = (E_1, p_1, B)$, $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ をそれぞれ向き付けられた m 次、 n 次ベクトル束とする。このとき、 $\chi(\xi_1 \oplus \xi_2) = \chi(\xi_1) \cup \chi(\xi_2)$ である。

proof) $\xi_1 \oplus \xi_2 = (E, p, B)$ とおく。 $q_i : E_1 \times E_2 \rightarrow E_i$ ($i = 1, 2$) をそれぞれ projection とする。このとき、

$$p_1^*(\xi_2) = (E, q_1, E_1) \quad , \quad p_2^*(\xi_1) = (E, q_2, E_2)$$

である。 $p_i^0 = p_i|_{E_i^0} : E_i^0 \rightarrow B$ とおき、

$$p_1^{0*}(\xi_2) = (E'_1, q'_1, E_1^0) \quad , \quad p_2^{0*}(\xi_1) = (E'_2, q'_2, E_2^0)$$

とおく。 $E'_i \subset E$, $E'_1 \cup E'_2 = E^0$, $q'_i = q_i|_{E'_i}$ であり、 $b \in B$ に対し、 $E_{ib} = E_b \cap E'_i$ ($i = 1, 2$) とおけば、

$$\begin{array}{ccc}
 H^m(E_1, E_1^0) \otimes H^n(E_2, E_2^0) & \xrightarrow{j_{1b}^* \otimes j_{2b}^*} & H^m(E_{1b}, E_{1b}^0) \otimes H^n(E_{2b}, E_{2b}^0) \\
 \downarrow q_1^* \otimes q_2^* & & \downarrow q_1^* \otimes q_2^* \\
 H^m(E, E'_1) \otimes H^n(E, E'_2) & \xrightarrow{j_b^* \otimes j_b^*} & H^m(E_b, E_{1b}^0) \otimes H^n(E_b, E_{2b}^0) \\
 \downarrow \cup & & \downarrow \cup \\
 H^{m+n}(E, E^0) & \xrightarrow{j_b^*} & H^{m+n}(E_b, E_b^0)
 \end{array}$$

が可換図となる。 $w_b^1 \in H^m(E_{1b}, E_{1b}^0)$, $w_b^2 \in H^n(E_{2b}, E_{2b}^0)$, $w_b \in H^{m+n}(E_b, E_b^0)$ をそれぞれ、 E_{1b}, E_{2b}, E_b の与えられた向きから定まる生成元とする。積多様体の向きに習えば、 $w_b = w_{1b} \times w_{2b}$ であることが分かる。これより、

$$j_b^*(q_1^*(w(\xi_1)) \cup q_2^*(w(\xi_2))) = q_1^*(w_{1b}) \cup q_2^*(w_{2b}) = w_{1b} \times w_{2b} = w_b$$

となる。クロス積とカップ積の関係はコホモロジーの節を参照。Thom 類の一意性から、

$$q_1^*(w(\xi_1)) \cup q_2^*(w(\xi_2)) = w(\xi_1 \oplus \xi_2)$$

である。あとは Euler 類の定義を考えると、

$$\begin{array}{ccccc}
 H^m(E_1, E_1^0) \otimes H^n(E_2, E_2^0) & \xrightarrow{j_1^* \otimes j_2^*} & H^m(E_1) \otimes H^n(E_2) & \xleftarrow{p_1^* \otimes p_2^*} & H^m(B) \otimes H^n(B) \\
 \downarrow q_1^* \otimes q_2^* & & \downarrow q_1^* \otimes q_2^* & & \downarrow = \\
 H^m(E, E_1') \otimes H^n(E, E_2') & \xrightarrow{j^* \otimes j^*} & H^m(E) \otimes H^n(E) & \xleftarrow{p^* \otimes p^*} & H^m(B) \otimes H^n(B) \\
 \downarrow \cup & & \downarrow \cup & & \downarrow \cup \\
 H^{m+n}(E, E^0) & \xrightarrow{j^*} & H^{m+n}(E) & \xleftarrow{p^*} & H^{m+n}(B)
 \end{array}$$

の可換図式を見れば、 $\chi(\xi_1 \oplus \xi_2) = \chi(\xi_1) \cup \chi(\xi_2)$