0.1 Thom 類

まずファイバー束の定義を拡張して、ファイバー束対を考える。

Definition 0.1.1

$\xi = ((E, E^0), p, B, (F, F^0))$ がファイバー束対であるとは、$(E, E^0), (F, F^0)$ が空間対であり、$p : E \longrightarrow B$ がファイバー束であり、その局所自明化 $\varphi : p^{-1}(V) \xrightarrow{\cong} V \times F$ が、対の同相

$$\varphi : (p^{-1}(V), p^{-1}(V) \cap E^0) \xrightarrow{\cong} V \times (F, F^0)$$

となるとき ξ をファイバー束対と呼ぶ。

Remmark 0.1.2

$\xi = ((E, E^0), p, B, (F, F^0))$ をファイバー束対とする。$A \subset B$ に対し、

$$p^{-1} = E_A \ , \ E_A^0 = E_A \cap E^0 \ , \ p_A = p_{|E_A} : E_A \longrightarrow B$$

と定義すれば、$\xi_A = ((E_A, E_A^0), p_A, A, (F, F^0))$ はファイバー束対となり、これを ξ の A への制限と呼ぶ。

Example 0.1.3

(F, F^0) を位相空間対、B を位相空間としたとき、$(E, E^0) = (B \times F, B \times F^0)$ とし、$p : B \times F \longrightarrow B$ を第一成分への射影とすれば、$(B \times (F, F^0), p, B, (F, F^0))$ はファイバー束対となる。これを自明なファイバー束対と呼ぶ。

Example 0.1.4

$\xi = (E, p, B)$ を n 次ベクトル束とする。このとき、0 断面 $s : B \longrightarrow E$ は単射であるから、$E^0 = E - s(B)$ とおく。このとき、$\overline{\xi} = ((E, E^0), p, B, (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0))$ はファイバー束対となる。これをベクトル束 ξ に付属するファイバー束対と呼ぶ。

Example 0.1.5

$\xi = (E, p, B, S^{n-1})$ を球面束とする。このとき、p の mapping cylinder を考えると、

$$q : M_p = E \times I \cup_p B \longrightarrow B$$

に対し、$((M_p, E), q, B, (D^n, S^{n-1}))$ はファイバー束対である。

次の Leray-Hirsch の定理は重要であるのだが、証明がかなり長いので省略させていただく。以下（コ）ホモロジー群の係数 R は主イデアル整域とする。

Theorem 0.1.6 *Leray-Hirsch* の定理

$\xi = ((E, E^0), p, B, (F, F^0))$ をファイバー束対とする。このとき、$H_*(F, F^0)$ は有限生成かつ自由とする。さらに、0 次準同型

$$\theta : H^*(F, F^0) \longrightarrow H^*(E, E^0)$$

が与えられ、${}^\forall b \in B$ に対し、inclusion

$$j_b : (E_b, E_b^0) \longrightarrow (E, E^0)$$

を考えると、

$$j_b^* : H^*(E, E^0) \longrightarrow H^*(E_b, E_b^0)$$

との合成、$j_b^* \circ \theta : H^*(F, F^0) \longrightarrow H^*(E_b, E_b^0)$ が同型になると仮定する。このとき、次数付き加群の準同型

$$\Phi : H_*(E, E^0) \longrightarrow H_*(B) \otimes H_*(F, F^0) \quad , \quad \Phi^* : H^*(B) \otimes H^*(F, F^0) \longrightarrow H^*(E, E^0)$$

を次のように定義する。$a_1, a_2, \cdots, a_k$ を $H_*(F, F^0)$ の生成元とする。このとき、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ を $< \alpha_i, a_i >= 1$, $< \alpha_i, a_j >= 0 \quad (i \neq j)$ とすれば、これが普遍係数定理から $H^*(F, F^0)$ の生成元である事がわかる。

$$\Phi(e) = \sum_{i=1}^{k} p_*(\theta(\alpha_i) \cap e) \otimes a_i \quad , \quad \Phi^*(\beta \otimes \alpha) = p^*(\beta) \cup \theta(\alpha)$$

このとき、Φ , Φ^* は同型である。

Definition 0.1.7

$\xi = ((E, E^0), p, B, (F, F^0))$ をファイバー束対とする。このとき、

$$H_n(F, F^0; R) = R \quad , \quad H_m(F, F^0; R) = 0 \quad (n \neq m)$$

を満たすとき、ξ はホモロジー n 球面的であると呼ぶ。

Remmark 0.1.8

Example 0.1.4 , Example 0.1.5 はホモロジー n 球面的である。

Definition 0.1.9

$\xi = ((E, E^0), p, B, (F, F^0))$ をホモロジー n 球面的なファイバー束対とするこのとき $b \in B$ に対し、普遍係数定理により

$$H^n(E_b, E_b) \cong H^n(F, F^0) \cong R$$

が言えるので、この生成元 $w_b \in H^n(E_b, E_b^0)$ を一つ選び、その集合 $\{w_b\}_{b\in B}$ を考える。このとき、$^\forall b \in B$ に対しその近傍 N と、$w_N \in H^n(E_N, E_N^0)$ が存在し、

$$j_b^* : H^n(E_N, E_N^0) \longrightarrow H^n(E_b, E_b^0)$$

を inclusion からの誘導として、$j_b^*(w_N) = w_b$ を満たすとき、$\{w_b\}_{b\in B}$ を ξ の向きという。向きが存在するとき、ξ は向き付け可能と呼び、向きが与えられたとき、ξ は向き付けられたファイバー束対と呼ぶ。

Theorem 0.1.10

$\xi = ((E, E^0), p, B, (F, F^0))$ をホモロジー n 球面的なファイバー束対とする。このとき $m < n$ に対し、$H_m(E, E^0) = 0$ である。

proof)　　V を座標近傍とすると、

$$(E_V, E_V^0) = (p^{-1}(V), p^{-1}(V) \cap E^0) \cong (V \times (F, F^0))$$

なので、キュネットの公式より、

$$H_m(E_V, E_V^0) \cong H_{m-n}(V) \otimes H_n(F, F^0)$$

なので、$m < n$ のとき、$H_{m-n}(V) = 0$ となるので、$H_m(E_V, E_V^0) = 0$ また、座標近傍 V, U に対しては、Mayer Vietrice 完全列から、

$$H_m(E_V, E_V^0) \oplus H_m(E_U, E_U^0) \longrightarrow H_m(E_{V\cup V}, E^0_{V\cup U}) \longrightarrow H_{m-1}(E_{V\cap U}, E^0_{V\cap U})$$

$m < n$ のとき、$H_m(E_V, E_V^0) = H_m(E_U, E_U^0) = H_m(E_{V\cap U}, E^0_{V\cap U}) = 0$ である。よって、$H_m(E_{V\cup V}, E^0_{V\cup U}) = 0$。これより有限個の座標近傍の和集合 W に対し、$H_m(E_W, E_W^0) = 0$ が成り立つ。$\mathcal{U}$ を座標近傍の有限和集合で inclusion を morphism とした有向集合とする。このことから、$\{E_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ は E の開被覆であり有向集合となる。E の compact 集合はある E_U に含まれるから、

$$H_m(E, E^0) \cong H_m(\mathrm{colim}_{U\in\mathcal{U}} E_U, \mathrm{colim}_{U\in\mathcal{U}} E_U^0) \cong \mathrm{colim}_{U\in\mathcal{U}} H_m(E_U, E_U^0) = 0$$

である。

□

Theorem 0.1.11

$\xi = ((E, E^0), p, B, (F, F^0))$ を向き付けられたホモロジー n 球面的なファイバー束対とする。$\{w_b\}_{b \in B}$ をその向きとしたとき、$w \in H^n(E, E^0)$ が一意に存在し、$^\forall b \in B$ に対し、

$$j_b^* : H^*(E, E^0) \longrightarrow H^n(E_b, E_b^0)$$

を inclusion からの誘導としたとき、$j_b^*(w) = w_b$ を満たす。この $w \in H^n(E, E^0)$ を w の Thom 類と呼ぶ。

proof)　　後に回す。

Theorem 0.1.12

$\xi = ((E, E^0), p, B, (F, F^0))$ を向き付けられたホモロジー n 球面的なファイバー束対とする。このとき、

$$\phi : H_m(E, E^0) \longrightarrow H_{m-n}(B) \quad , \quad \phi^* : H^m(B) \longrightarrow H^{m+n}(E, E^0)$$

を、Thom 類 $w \in$ を用いて、$\phi(e) = p_*(w \cap e) \quad , \quad \phi^*(\beta) = p^*(\beta) \cup w$ で定義するとこれらは同型となる。これを Thom 同型と呼ぶ。

proof)　　$\theta : H^n(F, F^0) \longrightarrow H^n(E, E^0)$ を $H^n(F, F^0) \cong R$ の生成元 α を用いて $\theta(\alpha) = w$ と定義する。このとき、$j_b^* : H^*(E, E^0) \longrightarrow H^*(E_b, E_b^0)$ に対して、$j_b^* \circ \theta(\alpha) = w_b$ で生成元同士で移りあうのでこれは同型である。よって Larey-Hisch の定理により、

$$\phi : H_m(E, E^0) \longrightarrow H_{m-n}(B) \otimes H_n(F, F^0) \ , \ \phi^* : H^m(B) \otimes H^n(F, F^0) \longrightarrow H^{m+n}(E, E^0)$$

が、$\phi(e) = p_*(\theta(\alpha) \cap e) \otimes a \quad , \quad \phi^*(\beta \otimes \alpha) = p^*(\beta) \cup \theta(\alpha)$ で定義されこれらが同型となる。ただし、$a \in H_n(F, F^0)$ は $< \alpha, a >= 1$ を満たす生成元である。

$$H_{m-n}(B) \otimes H_n(F, F^0) \cong H_{m-n}(B) \otimes R \cong H_{m-n}(B) \ , \ H^m(B) \otimes H^n(F, F^0) \cong H^m(B) \otimes R \cong H^m(B)$$

となる事を考えれば、

$$\phi(e) = p_*(w \cap e) \quad , \quad \phi^*(\beta) = p^*(\beta) \cup w$$

となる事がわかる。

□

では続いて、Theorem 0.1.11 の証明に入る。

proof of Theorem 0.1.11)　まず Thom 類 $w \in H^n(E, E^0)$ が存在したとして、その一意性を示す。$w, w' \in H^n(E, E^0)$ に対し、$j_b^*(w) = j_b^*(w') = w_b$ を満たすとする。このとき、w を固定する事で、Theorem 0.1.12 の Thom 同型が存在する。よって、ϕ^* の全射性から、$\beta \in H^0(B)$ が存在し、$\phi^*(\beta) = w'$。すなわち、$p^*(\beta) \cup w = w'$。この両辺に、j_b^* を施すと、$(p \circ j_b)^*(\beta) \cup w_b = w_b$ となる。これにより、$(p \circ j_b)^*(\beta) = 1 \in H^0(E_b)$ である。ところで、普遍係数定理より $H^0(B) \cong H_0(B)^\sharp$ であるので、$\beta : H_0(B) \longrightarrow R$ と考えられる。さらに $(p \circ j_b)^*(\beta)$ は、

$$H_0(E_b) \xrightarrow{(j_b)_*} H_0(E) \xrightarrow{p_*} H_0(B) \xrightarrow{\beta} R$$

と考えられる。任意の $b \in B$ に対し、これが 1 なので、$\beta = 1$ であるので $w = w'$ である。

続いて Thom 類の存在を示す。$\{w_b\}_{b \in B}$ を ξ の向きとする。B の開集合 U は、$w_U \in H^n(E_U, E_U^0)$ で、

$$(j_b^U)^* : H^n(E_U, E_U^0) \longrightarrow H^n(E_b, E_b^0)$$

で $(j_b^U)^*(w_U) = w_b$ を満たすものが存在するとする。ただし、j_b^U は inclusion である。このような U の集合を $\mathcal{U}$ とする。$U, V \in \mathcal{U}$ に対し、Mayer Vietrice 完全列

$$H^n(E_{U \cup V}, E_{U \cup V}^0) \xrightarrow{j} H^n(E_U, E_U^0) \oplus H^n(E_V, E_V^0) \xrightarrow{i} H^n(E_{U \cap V}, E_{U \cap V}^0)$$

を考えると、$w_U \in H^n(E_U, E_U^0)$,　$w_V \in H^n(E_V, E_V^0)$ に対し、$U \cap V = \phi$ であれば、$H^n(E_{U \cap V}, E_{U \cap V}^0) = 0$ なので、$i(w_U, w_V) = 0$ である。また、$U \cap V \neq \phi$ ならば、$b \in U \cap V$ をとると、

$$(j_b^{U \cap V})^* \circ (j_{U \cap V}^U)^*(w_U) = (j_b^U)^*(w_U) = w_b = (j_b^V)^*(w_V) = (j_b^{U \cap V})^* \circ (j_{U \cap V}^V)^*(w_V)$$

であるので、$\xi_{|_{U \cap V}}$ に先ほどの一意性の議論を繰り返せば、$(j_{U \cap V}^U)^*(w_U) = (j_{U \cap V}^V)^*(w_V)$ となり、

$$i(w_U, w_V) = (j_{U \cap V}^U)^*(w_U) - (j_{U \cap V}^V)^*(w_V) = 0$$

であることが分かる。これより、$w_{U\cup V}\in H^n(E_{U\cup V},E^0_{U\cup V})$ が存在し、$j(w_{U\cup V})=(w_U,w_V)$ を満たす。よって、$w_U=(j_U^{U\cup V})^*(w_{U\cup V})$ ，$w_V=(j_V^{U\cup V})^*(w_{U\cup V})$ であり、

$$j_b^{U\cup V}(w_{U\cup V})=(j_b^U)^*\circ(j_U^{U\cup V})^*(w_{U\cup V})=(j_b^U)^*(w_U)=w_b$$

ということは、$U\cup V\in\mathcal{U}$ だから、inclusion を morphism として $\mathcal{U}$ は有向集合となる。さらに、向きの定義から $w_b\in H^n(E_b,E_b^0)$ に対し、b の開近傍 N_b と、$w_N\in H^n(E_N,E_N^0)$ が存在し、$(j_b^N)^*(w_N)=w_b$ を満たす。つまり、$N_b\in\mathcal{U}$ であり、$\{N_b\}_{b\in B}$ は B の開被覆であるから、任意の B の compact 集合に対し、$\{N_b\}_{b\in B}$ から有限個選べて覆う事ができる。よって B の compact 集合は $\mathcal{U}$ のある元に含まれる。これより、E の開被覆 $\{E_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ は有向集合で E の compact 集合は $\{E_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ のある元に含まれる。よって、

$$\mathrm{colim}(j_U)_*:\mathrm{colim}_{U\in\mathcal{U}}H_n(E_U,E_U^0)\longrightarrow H_n(E,E^0)$$

が同型となる。よって、$w\in H^n(E,E^0)$ を、$[a]\in H^n(E_U,E_U^0)\cong\mathrm{colim}H_n(E,E^0)$ $(a\in H_n(E_U,E_U^0))$ に対し、$<w,[a]>=<w_U,a>$ で定義する。w は $[a]$ の取り方にはよらない。このとき、$^\forall b\in B$ に対し、$b\in{}^\exists U\in\mathcal{U}$ であるので、$a\in H_n(E_b,E_b^0)$ に対し、

$$<j_b^*(w),a>=<w,(j_b)_*(a)>=<w_U,(j_b^U)_*(a)>=<(j_b^U)^*(w_U),a>=<w_b,a>$$

であるため、$j_b^*(w)=w_b$ である。

□

Definition 0.1.13

V を n 次元ベクトル空間とし、その基底 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ で順序を考慮したものを、順序付けられた基底と呼ぶ。$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ ，$\{v_1',v_2',\cdots,v_n'\}$ を二つの順序付けられた基底とすると、$v_i'=\sum a_{ij}v_j$ と表せる。このとき、$\det(a_{ij})\neq 0$ であるが、$\det(a_{ij})>0$ のとき、$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}\sim\{v_1',v_2',\cdots,v_n'\}$ と定義する。明らかにこれは同値関係になるため、これにより V の向き付けられた集合の同値類を考えると、2 点集合になる。これを、$\{o,-o\}$ とおく。この 2 つの元を各々V の向きと呼ぶ。

Definition 0.1.14

$\xi=(E,p,B)$ を n 次実ベクトル束とする。$b\in B$ に対し、n 次ベクトル空間 $E_b=p^{-1}(b)$ の向き o_b をひとつ選び、$\{o_b\}_{b\in B}$ を考える。$^\forall b\in B$ に対し、b の近傍 N と、$\xi_{|_N}:E_N\longrightarrow N$ の n 個の断面 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ が存在し、$a\in N$ に対し、$(s_1(a),s_2(a),\cdots,a_n(a))$ が o_a を表す代表元の順序付けられた基底となるとき、

$\{o_b\}_{b\in B}$ を ξ の向きと言う。向きが存在するとき、ξ は向き付けられるといい、向きが与えられたとき ξ は向き付けられたという。

Example 0.1.15

自明なベクトル束 ε^n は向き付けられる。

proof) $\varepsilon^n = (B\times \mathbf{R}^n, p, B)$ であり、$p^{-1}(b) = \mathbf{R}^n$ であり標準的な基底を代表元に選べばよい。このとき $s_i : B \longrightarrow B\times\mathbf{R}^n$ を $s_i(b) = (b, e_i) \quad (1 \leqq i \leqq n)$ で定義すれば断面となり、ε^n の向きを定める。

Lemma 0.1.16

n 次ベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ に付属するホモロジー n 球面的なファイバー束対、

$$\overline{\xi} = ((E, E^0), p, B, (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0))$$

を考える。ξ に向きがつけられるならば、$\overline{\xi}$ にも向きがつけられる。

proof) $\{o_b\}_{b\in B}$ を ξ の向きとする。$o_b = [v] = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$ としたとき、$h_v : \mathbf{R}^n \longrightarrow E_b$ を、$h_v(e_i) = v_i$ で定義する。このとき、h_v は o_b に依存し homotopic を除いて一意に存在する。なぜなら、$(v_1, v_2, \cdots, v_n) \sim (v'_1, v'_2, \cdots, v'_n)$ に対し、$v'_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j$ であり、$\det(a_{ij}) > 0$ なのだが、$GL_+(\mathbf{R}^n)$ は弧状連結なので、$\alpha : I \longrightarrow GL_+(\mathbf{R}^n)$ を $\alpha(0) = E$, $\alpha(1) = (a_{ij})$ が存在し、

$$H : \mathbf{R}^n \times I \longrightarrow E_b$$

を $H(x,t) = \alpha(t)h_{v'}(x)$ とすれば $h_v \simeq h_{v'}$ である。また、h は局所自明化 $\varphi_b : E_b\ \mathbf{R}^n$ と基底変換の合成であるから連続である。よって、h は同相であり、

$$h^* : H^n(E_b, E_b^0) \longrightarrow H^n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0) \cong R$$

が向きによって一意に定まるので、$w^n \in H^n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0)$ を生成元とすると、$w_b = (h^*)^{-1}(w^n) \in H^n(E_b, E_b^0)$ と定義する。$\{w_b\}_{b\in B}$ が $\overline{\xi}$ の向きであること示そう。$b \in B$ に対し、b の近傍 N と $\xi_{|_N} : E_N \longrightarrow N$ の断面、$s_1, s_2, \cdots, s_n$ が存在するので、

$$\varphi : N \times \mathbf{R}^n \longrightarrow E_N$$

を

$$\varphi(a,(x_1,x_2,\cdots,x_n)) = x_1s_1(a)+x_2s_2(a)+\cdots+x_ns_n(a)$$

と定義すれば、これは同相である。よって、

$$\varphi^*: H^n(E_N,E_N^0) \longrightarrow H^n(N\times(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n-0))$$

であり、$1\times w^n\in H^n(N\times(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n-0))$ を考え、

$$w_N = (\varphi^*)^{-1}(1\times w^n)\in H^n(E_N,E_N^0)$$

とおく。$^\forall a\in N$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
N\times\mathbf{R}^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] & E_N \\
\mathbf{R}^n \arrow[r, "h"'] & E_a \arrow[u, "j_a^N"']
\end{tikzcd}$$

はhomotopy可換である。ただし、q はprojectionである。実際、$(n,(x_1,x_2,\cdots,x_n))\in N\times\mathbf{R}^n$ に対し、

$$h\circ q(n,(x_1,\cdots,x_n)) = h(x_1,\cdots,x_n) = h(x_1e_1+\cdots+x_ne_n) = x_1v_1+\cdots+x_nv_n$$

であり、$(v_1,v_2,\cdots,v_n)\sim(s_1(a),s_2(a),\cdots,s_n(a))$ だったので成り立つ。これより、

$$\begin{tikzcd}
H^n(N\times(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n-0)) \arrow[r, "(\varphi^*)^{-1}"] & H^n(E_N,E_N^0) \arrow[d, "(j_a^N)^*"] \\
H^n(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n-0) \arrow[u, "q^*"] \arrow[r, "(h^*)^{-1}"'] & H^n(E_a,E_a^0)
\end{tikzcd}$$

$$w_b = (h^*)^{-1}(w^n) = (j_a^N)^*\circ(\varphi^*)^{-1}\circ q^*(w_n) = (j_a^N)^*\circ(\varphi^*)^{-1}(1\times w^n) = (j_a^N)^*(w_N)$$

であるため、$\{w_b\}_{b\in B}$ が $\overline{\xi}$ の向きである。

$\square$

Definition 0.1.17

$\xi=(E,p,B)$ は向き付けられた n 次ベクトル束とする。このとき付属するホモロジー球面的なファイバー束対に対し、Thom 類 $w\in H^n(E,E^0)$ が定まる。この w をベクトル束 ξ の Thom 類とよび、$w(\xi)$ で表す。

Lemma 0.1.18

ベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ において、$p : E \longrightarrow B$ は homotopy equivalence である。

proof) $i : B \longrightarrow E$ を 0 断面とする。$p \circ i = 1_B$ であり、$e \in E$ に対し、

$$i \circ p(e) = i(p(e)) = 0 \in p^{-1}(p(e)) \cong \mathbf{R}^n$$

であるため、$\mathbf{R}^n$ は凸集合だから、$H : E \times I \longrightarrow E$ を $H(e, t) = te \in p^{-1}(p(e))$ で定義すれば、$i \circ p \simeq 1$ である。

□

Definition 0.1.19

向き付けられた n 次ベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ に対し、$j : E \longrightarrow (E, E^0)$ を inclusion とし、

$$H^n(E, E^0) \xrightarrow{j^*} H^n(E) \xrightarrow{(p^*)^{-1}} H^n(B)$$

を考え、$\chi(\xi) = (p^*)^{-1} \circ j^*(w(\xi)) \in H^n(B)$ とかき、ξ の Euler 類と呼ぶ。

Theorem 0.1.20 *Thom* 完全列

$\xi = (E, p, B)$ を向き付けられた n 次ベクトル束とする。このとき、次の完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow H_m(E^0) \xrightarrow{p_*} H_m(B) \xrightarrow{\chi(\xi)\cap} H_{m-n}(B) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(E^0) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^{m-1}(E^0) \xrightarrow{\delta} H^{m-n}(B) \xrightarrow{\cup\chi(\xi)} H^m(B) \xrightarrow{p^*} H^m(E^0) \longrightarrow \cdots$$

これを Thom 完全列、あるいは Thom-Gaysin 完全列と呼ぶ。

proof) (E, E_0) のホモロジー完全列を考えると、

$$\cdots \longrightarrow H_m(E^0) \longrightarrow H_m(E) \xrightarrow{j_*} H_m(E, E^0) \xrightarrow{\partial} H_{m-1}(E^0) \longrightarrow \cdots$$

であるが、Thom 同型 $\phi : H_m(E, E^0) \longrightarrow H_{m-n}(B)$ を考えると、

$$\chi(\xi) \cap p_*(e) = (p^*)^{-1} \circ j^*(w(\xi)) \cap p_*(e) = p_*(j^*(w(\xi)) \cap e) = p_*(w(\xi) \cap j_*(e)) = \phi \circ j_*(e)$$

であるため、

$$\begin{tikzcd} H_m(E) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "p_*"', "\cong"] & H_m(E, E^0) \arrow[d, "\phi"', "\cong"] \\ H_m(B) \arrow[r, "\chi(\xi)\cap"'] & H_{m-n}(B) \end{tikzcd}$$

が可換であるので、これを置き換えればよい。コホモロジーの場合も同様である。

□