Definition 0.0.1

位相空間 X において、$x \in X$ に対し、$H_*(X, X - x)$ を、X の局所ホモロジー群と呼ぶ。

また、X の部分空間による空間対 (A, B) に対し、inclusion を、

$$j_A^B : (X, X - A) \longrightarrow (X, X - B)$$

と書くことにする。

Proposition 0.0.2

X が n 多様体とすると、$^\forall x \in X$ に対し、

$$H_m(X, X - x) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

proof) V を x の座標近傍とし、$h : V \xrightarrow{h} \mathbf{R}^n$ とする。

$$\mathbf{R}^n - \{0\} \cong S^n - \{p_+, p_-\} \simeq S^{n-1}$$

である。これにより、$\mathbf{R}^n$ が可縮であるのと、切除同型定理と合わせて、

$H_m(X, X - x) \cong H_m(V, V - x)$

$\cong H_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - h(x)) \cong H_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - \{0\}) \cong \widetilde{H}_{m-1}(\mathbf{R}^n - 0) \cong H_{m-1}(S^{n-1})$

これにより、

$$H_m(X, X - x) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\square$

Lemma 0.0.3

X が n 多様体 とすると、$^\forall x \in X$ に対し、

$$^\exists K : x \text{ の compact 近傍} \qquad \text{s.t} \qquad ^\forall y \in K \text{ に対し、}$$

$$j^y_{K*} : H_n(X, X-K) \xrightarrow{\cong} H_n(X, X-y)$$

proof)　$x \in X$ に対し、V を x の座標近傍とし、$V \overset{h}{\cong} \mathbf{R}^n$ とする。

$$D = \overline{U_1(h(x))}$$

とおくと、D : compact なので、$h^{-1}(D)$ は x の compact 近傍である。

$$\begin{tikzcd}
H_n(X, X-h^{-1}(D)) \arrow[d, "j^y_{K*}"'] & H_n(V, V-h^{-1}(D)) \arrow[l] \arrow[r, "h_*"] \arrow[d] & H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - D) \arrow[d] \\
H_n(X, X-y) & H_n(V, V-y) \arrow[l] \arrow[r, "h_*"] & H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - h(x))
\end{tikzcd}$$

記されていない写像はすべて inclusion からの誘導であるので、この図式は可換となる。ここで、$\mathbf{R}^n - D$ は、$\mathbf{R}^n - h(x)$ の変位 retract であるので、切除定理と合わせれば、上の図式は、

$$\begin{tikzcd}
H_n(X, X-h^{-1}(D)) \arrow[d, "j^y_{K*}"'] & H_n(V, V-h^{-1}(D)) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - D) \arrow[d, "\cong"] \\
H_n(X, X-y) & H_n(V, V-y) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] & H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - h(x))
\end{tikzcd}$$

であるため、$j^y_{K*} : H_n(X, X-K) \longrightarrow H_n(X, X-y)$ は同型となる。

$\square$

Lemma 0.0.4

X を連結な n 多様体とする。$a \in H_n(X)$ に対し、$^\exists x \in X$　s.t

$$j^x_{X*} : H_n(X) \longrightarrow H_n(X, X-x)$$

に対し、$j^x_{X*}(a) = 0$ であるならば、$^\forall y \in X$ に対し、$j^y_{X*}(a) = 0$

proof)　$a \in H_n(X)$ に対し、

$$A = \{x \in X \mid j^x_{X*}(a) = 0\ \} \quad , \quad B = \{x \in X \mid j^x_{X*}(a) \neq 0\ \}$$

とすると、$X = A \cup B$, $A \cap B = \phi$ である。ここで、$x \in A$ に対し、Lemma 0.0.3 より、x のcompact 近傍 K が存在し、$^\forall y \in K$ に対し、

$$j^y_{K*} : H_n(X, X - K) \longrightarrow H_n(X, X - y)$$

は同型となる。そこで、次の可換な図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
H_n(X) \arrow[r, "j^y_{X*}"] \arrow[d, "j^x_{X*}"'] \arrow[dr, "j^K_{X*}"] & H_n(X, X-y) \\
H_n(X, X-x) & H_n(X, X-K) \arrow[l, "\cong"] \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

$j^x_{X*}(a) = 0$ ならば、 $j^y_{X*}(a) = 0$ である。よって、$K \subset A$ である。

これより、$x \in \mathrm{Int}K \subset K \subset A$ であるため、A は open である。同様にして、上の図式により、B も open であることがわかる。しかし、X の連結性により、どちらかが X でどちらかが ϕ である。しかし仮定により、$A \neq \phi$ であるので、$A = X$ である。これより、題意が示された。

$\square$

次は消滅定理（vanishing theorem）と呼ばれる多様体の中でも重要な定理である。多様体に関する命題の証明には往々にして、というよりこれが原点なのだからもっともなのだが、$\mathbf{R}^n$や凸集合など、調べやすい空間に限定して証明し、それを一般化するという手法をとる。多様体とは局所的に $\mathbf{R}^n$ であることを忘れてはならない。とりあえず、一般の定理を先に述べるがその証明は各ステップを踏んだ後である。

Theorem 0.0.5 （消滅定理）

X を n 多様体とし、K をその閉集合とする。このとき、

$$H_m(X, X - K) = 0 \qquad (m > n)$$

であり、$a \in H_n(X, X - K)$ に対し、$^\forall x \in K$ に対し、$j^x_{K*}(a) = 0$ ならば、$a = 0$

Lemma 0.0.6

X を n 多様体とし、K_1, K_2をその閉集合とする。このとき、$K_1, K_2, K_1 \cap K_2$ に対し、定理が成り立つとすると、$K_1 \cup K_2$ に対しても定理が成り立つ。

proof)　K_1, K_2 は閉集合なので、$X - K_1$, $X - K_2$ は open である。

$(X, X - K_1)$, $(X, X - K_2)$ の Mayer-Vietoris 完全列を考えると、

$$H_{m+1}(X, X-(K_1 \cap K_2)) \xrightarrow{\partial_*} H_m(X, X-(K_1 \cup K_2)) \xrightarrow{i} H_m(X, X-K_1) \oplus H_m(X, X-K_2)$$

において、$m > n$ ならば、

$$H_{m+1}(X, X-(K_1 \cap K_2)) = H_m(X, X-K_1) = H_m(X, X-K_2) = 0$$

なので、

$$H_m(X, X-(K_1 \cup K_2)) = 0$$

$a \in H_n(X, X - K_1 \cup K_2)$ とし、${}^{\forall}x \in X$ に対し、$j^x_{K_1 \cup K_2 *}(a) = 0$ とする。

$x \in K_1$ に対し、

$$j^x_{K_1 *} \circ j^{K_1}_{K_1 \cup K_2 *}(a) = j^x_{K_1 \cup K_2 *}(a) = 0$$

仮定より、$j^{K_1}_{K_1 \cup K_2 *}(a) = 0$。同様にして、$j^{K_2}_{K_1 \cup K_2 *}(a) = 0$

ここで、もう一度上記の Mayer-Vietoris 完全列を考えると、

$$H_{n+1}(X, X-(K_1 \cap K_2)) \xrightarrow{\partial_*} H_n(X, X-(K_1 \cup K_2)) \xrightarrow{i} H_n(X, X-K_1) \oplus H_n(X, X-K_2)$$

のうち、$H_{n+1}(X, X - (K_1 \cap K_2)) = 0$ であるので、i は単射である。

$$i(a) = (j^{K_1}_{K_1 \cup K_2 *}(a), j^{K_2}_{K_1 \cup K_2 *}(a)) = 0$$

であるため、$a = 0$

□

Lemma 0.0.7

$X = \mathbf{R}^n$, K : 凸 compact 集合に対し、消滅定理が成り立つ。

proof)　$x \in K$ に対し、K は 凸集合であるため、$\mathbf{R}^n - K$ は $\mathbf{R}^n - x$ の変位 retract であるので、

$$j^x_{K*} : H_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - K) \xrightarrow{\cong} H_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - x)$$

より、$m > n$ においては、$H_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - K) = 0$

また、$a \in H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - K)$ に対し、$j^x_{K*}(a) = 0$ とすれば、j^x_{K*} が同型なので、$a = 0$

□

Lemma 0.0.8

$X = \mathbf{R}^n$, K : 有限個の凸 compact 集合の和集合に対し、消滅定理が成り立つ。

proof)　　K_1, K_2 を凸 compact 集合とすると、$K_1 \cap K_2$ も凸 compact 集合である。Lemma　0.0.7 により、$K_1, K_2, K_1 \cap K_2$ に対して定理が成り立つ。また、Lemma 0.0.6 より、$K_1 \cup K_2$ に対しても、定理が成り立つ。あとは、有限個の凸 compact 集合の共通部分は凸 compact 集合なので、帰納法を用いれば証明される。

□

Lemma 0.0.9

$X = \mathbf{R}^n$, K : compact に対し、消滅定理が成り立つ。

proof)　　$a \in H_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - K)$ に対し、$a = [[c]]$ とする。

$$\text{ただし、}[c] \in \subset \mathrm{Ker}\partial \subset S_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - K) = S_m(\mathbf{R}^n)/S_m(\mathbf{R}^n - K)$$

ここで、$\partial[c] = 0 \in S_{m-1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - K)$ であるため、$\partial(c) \in S_{m-1}(\mathbf{R}^n - K)$

$$c = \sum a_i \sigma_i \in S_m(\mathbf{R}^n)$$

とすると、$\partial(c) = \sum\sum a_i \sigma_i \circ s_j$ である。ここで、各 i, j に関し、

$$\sigma_i \circ s_j : \Delta^{m-1} \longrightarrow \mathbf{R}^n - K$$

であるため、$\sigma_i \circ s_j(\Delta^{m-1}) \subset \mathbf{R}^n - K$ である。Δ^{m-1} : compact なので、$\sigma_i \circ s_j(\Delta^{m-1})$ も compact である。よって、$\sigma_i \circ s_j(\Delta^{m-1}), K$ は閉集合であり、$\sigma_i \circ s_j(\Delta^{m-1}) \cap K = \phi$ である。$\mathbf{R}^n$ は正規空間なので、

$$^{\exists}U, V : \text{open in } X \qquad s.t \qquad \sigma_i \circ s_j(\Delta^{m-1}) \subset U\ ,\ K \subset V\ ,\ U \cap V = \phi$$

$\partial(c) \in S_{m-1}(\mathbf{R}^n - V)$ であるため、$[c] \in \mathrm{Ker}\partial \subset S_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - V)$

$b = [[c]] \in H_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - V)$ とおけば、定義の仕方から、${j^K_V}_*(b) = a$

ところで、$^{\forall}x \in K$ に対し、$x \in V$ であるため、$\mathbf{R}^n$ が正則を用いて、

$$^{\exists}W : \text{open} \qquad s.t \qquad x \in W \subset \overline{W} \subset V$$

である。また、$^{\exists}\varepsilon > 0 \qquad \text{s.t} \qquad U_\varepsilon(x) \subset W$ であり、

$$x \in \overline{U_\varepsilon(x)} \subset \overline{W} \subset V$$

K はcompact であったので、$K \subset \bigcup_{x \in K} U_\varepsilon(x)$ に対し、

$$^{\exists}x_1, x_2, \cdots, x_p \in K \qquad s.t \qquad K \subset \bigcup_{i=1}^{p} U_\varepsilon(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_\varepsilon(x_i)} \subset V$$

ここで、$B_i = \overline{U_\varepsilon(x_i)}$, $B = \bigcup_{i=1}^{p} B_i$ とおくと、各 B_i は Disk なので凸 compact である。よって、Lemma 0.0.8 により、$m > n$ に対し、$H_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - B) = 0$ なので、$j^B_{V\,*}(b) = 0$

$$\therefore \qquad a = j^K_{V\,*}(b) = j^K_{B\,*} \circ j^B_{V\,*}(b) = 0$$

また、$m = n$ のとき、$^{\forall}x \in K$ に対し、$j^x_{K*}(a) = 0$ とする。よって、

$$j^x_{V*}(b) = j^x_{K*} \circ j^K_{V\,*}(b) = j^x_{K*}(a) = 0$$

また、$^{\forall}y \in B$ に対し、$y \in B_i$とすると、$z \in K \cap B_i$ に対し、次の図式、

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - V) \arrow[r, "j^z_{V*}"] \arrow[d, "j^y_{V*}"'] \arrow[dr, "j^{B_i}_{V\,*}"] & H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - z) \\
H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - y) & H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - B_i) \arrow[l, "j^y_{B_{i\,*}}"] \arrow[u, "j^z_{B_{i\,*}}"']
\end{tikzcd}$$

が可換となり、

$$j^z_{B_{i\,*}} \circ j^{B_i}_{V\,*}(b) = j^z_{V*}(b) = 0$$

ここで、Lemma 0.0.7 により、$j^z_{B_{i\,*}}$ は単射であるため、$j^{B_i}_{V\,*}(b) = 0$

これより、$j^y_{V*}(b) = 0$ であり、$j^y_{B*} \circ j^B_{V*}(b) = j^y_{V*}(b) = 0$

Lemma 0.0.8 により、$j^B_{V*}(b) = 0$

$$a = j^K_{V\,*}(b) = j^K_{B\,*} \circ j^B_{V*}(b) = 0$$

$\square$

Lemma 0.0.10

X : n 多様体で、K : compact に対し、$^{\exists}V$: open in X s.t $V \cong \mathbf{R}^n$

のとき、消滅定理が成立する。

proof) $x \in K$ に対し、$h : V \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^n$ とすると、

$$
\begin{tikzcd}
H_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - h(K)) \arrow[d, "{j^{h(x)}_{h(K)}}_*"'] & H_m(V, V-K) \arrow[l, "h_*"'] \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "j^x_{K*}"'] & H_m(X, X-K) \arrow[d, "j^x_{K*}"] \\
H_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - h(x)) & H_m(V, V-x) \arrow[l, "h_*"'] \arrow[r, "i_*"] & H_m(X, X-x)
\end{tikzcd}
$$

は、可換である。切除同型より、i_* は同型である。

よって、Lemma 0.0.9 より、$m > n$ に対し、

$$H_m(X, X-K) \cong H_m(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - h(K)) = 0$$

そして、$a \in H_n(X, X-K)$ で、$^{\forall}x \in X$ に対し、$j^x_{K*}(a) = 0$ とする。よって、$^{\forall}y \in h(K)$ に対し、$K \cong h(K)$ であるため、

$${j^y_{h(K)}}_*(h_* \circ i_*^{-1}(a)) = 0$$

ここで Lemma 0.0.9 により、$h_* \circ i_*^{-1}(a) = 0$ なので、$a = 0$

□

Lemma 0.0.11

X : n 多様体で、K : compact に対し、消滅定理が成り立つ。

proof) $x \in K$ に対し、V_xを x の座標近傍とする。

$$h : V_x \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^n$$

とすると、$U_1(h(x))$ を考え、$U_x = h^{-1}(U_1(h(x)))$ とおくと、U_x は x の開近傍であり、

$$x \in U_x \in \overline{U_x} \subset V_x$$

これより、$K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$ で、K：compact だから、

$$^{\exists}x_1, x_2, \cdots, x_p \in K \qquad s.t \qquad K \subset \bigcup_{i=1}^{p} U_{x_i}$$

ここで、$B_i = \overline{U_i} \cap K$ とおくと、$\overline{U_i}$：compact であるから、B_i：compact である。

また、$B_i \subset \overline{U_i} \subset V_{x_i} \cong \mathbf{R}^n$ なので、Lemma 0.0.10 により、各 B_i において、定理が成り立つ。

そして、$B_i \cap B_j$ も Lemma 0.0.10 の仮定をみたすため、定理が成り立つ。$K = \bigcup_{i=1}^{p} B_i$ であり、Lemma 0.0.6 を用いれば K に対して定理が成り立つことが示される。

$\square$

さてここまで来て、ようやく一般の証明に入りたいと思いますが、その前にひとつ補題を。

Lemma 0.0.12

X を n 多様体とし、K をその閉集合とする。このとき、$a \in H_*(X, X-K)$ に対し、

$$^{\exists}U : \text{open}\ ,\ ^{\exists}b \in H_*(U, U-L) \qquad (L = K \cap U)$$

s.t inclusion、$i : (U, U-L) \longrightarrow (X, X-K)$ に対し、$i_*(b) = a$、$\overline{U}$：compact

proof) $a \in H_m(X, X-K)$ に対し、$a = [[c]] = [\sum a_i \sigma_i]$ としておく。ここで、

$$\sigma_i : \Delta^m \longrightarrow X \quad , \quad \sigma_i \circ s_j : \Delta^{m-1} \longrightarrow X - K$$

V_x を x の座標近傍とすると、$V_x \overset{h}{\cong} \mathbf{R}^n$ なので、$U_x = h^{-1}(U_1(h(x)))$ とおくと、U_x は x の開近傍であり、$\overline{U_x}$はcompact である。また、

$$\sigma_i(\Delta^m) \subset \bigcup_{x \in \sigma_i(\Delta^m)} U_x$$

ここで、$\sigma_i(\Delta^m)$：compact なので、$^{\exists}x_1, x_2, \cdots, x_p \in \sigma_i(\Delta^m)$ s.t

$$\sigma_i(\Delta^m) \subset \bigcup_{j=1}^{p} U_{x_j}$$

$U_i = \bigcup_{j=1}^{p} U_{x_j}$ とおき、$U = \bigcup_i U_i$ とおく。これより、U : compact である。

$$c \in S(U)\ ,\ \partial(c) \in S(U-L)$$

これより、$[c] \in S(U, U-L)$ であり、このホモロジー類を $b \in H_m(U, U-L)$ とすれば、inclusion からの誘導

$$i_* : H_m(U, U-L) \longrightarrow H_m(X, X-K)$$

に対し、$i_*(b) = a$ である。

$\square$

Theorem 0.0.13 （消滅定理）

X を n 多様体とし、K をその閉集合とする。このとき、

$$H_m(X, X-K) = 0 \qquad (m > n)$$

であり、$a \in H_n(X, X-K)$ に対し、$^\forall x \in K$ に対し、$j^x_{K*}(a) = 0$ ならば、$a = 0$

proof) Lemma 0.0.12 により、$a \in H_m(X, X-K)$ に対し、

$$^\exists U : \text{open}\ ,\ ^\exists b \in H_*(U, U-L) \qquad (L = K \cap U)$$

s.t inclusion、$i : (U, U-L) \longrightarrow (X, X-K)$ に対し、$i_*(b) = a$、$\overline{U}$: compact である。

また、$U, (U-L) \cup (X-\overline{U})$ は open であり、

$$U \cap ((U-L) \cup (X-\overline{U})) = U \cup (X-\overline{U})$$

なので、切除定理により、

$$H_m(U, U-L) \cong H_m(U \cup (X-\overline{U}), (U-L) \cup (X-\overline{U}))$$

また、３対 $(X, U \cup (X-\overline{U}), (U-L) \cup (X-\overline{U}))$ の長い完全列

$$H_{m+1}(X, U\cup(X-\overline{U})) \longrightarrow H_m(U\cup(X-\overline{U}), (U-L)\cup(X-\overline{U})) \longrightarrow H_m(X, (U-L)\cup(X-\overline{U}))$$

を考えると、上の同型を含めて、

$$H_{m+1}(X, U \cup (X-\overline{U})) \longrightarrow H_m(U, U-L) \longrightarrow H_m(X, (U-L) \cup (X-\overline{U}))$$

が完全となる。ここで、

$$U \cup (X - \overline{U}) = X - \partial U \ , \ (U - L) \cup (X - \overline{U}) = X - (\overline{L} \cup \partial U)$$

であり、$\overline{U}$ は compact なので、その閉部分集合ということで、$\partial U, \overline{L}$ が compact となる。

Lemma 0.0.11 により、$m > n$ に対し、

$$H_{m+1}(X, U \cup (X - \overline{U})) = H_m(X, (U - L) \cup (X - \overline{U})) = 0$$

であるため、$H_m(U, U - L) = 0$ なので、$a = i_*(b) = i_*(0) = 0$ となり、

$$H_m(X, X - K) = 0$$

次に、$m = n$ のとき、$a \in H_n(X, X - K)$ で、${}^\forall x \in K$ に対し、$j^x_{K*}(a) = 0$ とする。

このとき、$x \in L$ に対し、次の図式は可換となる。

$$\begin{tikzcd} H_n(U, U - L) \arrow[r, "j^x_{L*}"] \arrow[d, "i_*"'] & H_n(U, U - x) \arrow[d, "i_*"] \\ H_n(X, X - K) \arrow[r, "j^x_{K*}"'] & H_n(X, X - x) \end{tikzcd}$$

このうち右側の i_* は切除定理より同型となるので、$j^x_{L*}(b) = 0$ である。

$$M = \overline{L} \cup \partial U \text{ とおくと、} (U - L) \cup (X - \overline{U}) = X - M$$

inclusion の誘導、

$$j_* : H_n(U, U - L) \longrightarrow H_n(X, X - M)$$

を考えておく。先の完全列

$$H_{n+1}(X, U \cup (X - \overline{U})) \longrightarrow H_n(U, U - L) \longrightarrow H_n(X, (U - L) \cup (X - \overline{U}))$$

を思い返すと、$H_{n+1}(X, U \cup (X - \overline{U})) = 0$ であるので、

$$0 \longrightarrow H_n(U, U - L) \xrightarrow{j_*} H_n(X, X - M)$$

が完全になり、j_* は単射であることがわかる。ここで、$M = \overline{L} \cup \partial U = L \cup \partial U$ である。なぜなら、一方の包含関係は明らかで、逆の包含関係は K : closed であるから、

$$\overline{L} \cup \partial U = \overline{U \cap K} \cup \partial U \subset (\overline{U} \cap K) \cup \partial U = ((U \cup \partial U) \cap K) \cup \partial U = (L \cup (\partial U \cap K)) \cup \partial U \subset L \cup \partial U$$

となるからだ。よって、$^\forall x \in M$ に対し、

$$j^x_{M*} : H_n(X, X-M) \longrightarrow H_n(X, X-x)$$

を考えると、$x \in L$ のときは、次の図式

$$\begin{tikzcd} H_n(U, U-L) \arrow[r, "j^x_{L*}"] \arrow[d, "j_*"'] & H_n(U, U-x) \arrow[d, "i_*"] \\ H_n(X, X-M) \arrow[r, "j^x_{M*}"'] & H_n(X, X-x) \end{tikzcd}$$

が可換となるため、

$$j^x_{M*} \circ j_*(b) = i_* \circ j^x_{L*}(b) = 0$$

である。一方、$x \in \partial U$ のときは、先の 3 対 $(X, U \cup (X - \overline{U}), (U-L) \cup (X - \overline{U}))$ 完全列、つまり、$(X, X-\partial U, X-M)$ の完全列を考えると

$$H_n(X-\partial U, X-M) \longrightarrow H_n(X, X-M) \longrightarrow H_n(X, X-\partial U)$$

が完全となり、次の図式、

$$\begin{tikzcd} & & H_n(X, X-\partial U) \arrow[d, "j^x_{\partial U *}"] \\ H_n(U, U-L) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d] & H_n(X, X-M) \arrow[ur] \arrow[r, "j^x_{M*}"] & H_n(X, X-x) \\ H_n(X-\partial U, X-M) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

が可換となり、完全列を経由するため、$j^x_{M*} \circ j_*(b) = 0$ である。これより、M : compact で、$^\forall x \in M$ に対し、$j^x_{M*} \circ j_*(b) = 0$ が言えるので、Lemma 0.0.11 により、$j_*(b) = 0$ となるが、j_* は単射なので、$b = 0$。これより、$a = i_*(b) = 0$

$\square$

Corollary 0.0.14

X が n 多様体ならば、$m > n$ に対し、$H_m(X) = 0$

proof) Theorem 0.0.13 で $K = X$ とおけば、成立する。

□

Proposition 0.0.15

X はcompact でない連結な n 多様体とすると、$H_n(X)=0$

proof)　　Lemma 0.0.12 により、$a \in H_n(X)$ に対し、

$$^{\exists}U : \text{open}\ ,\ ^{\exists}b \in H_*(U)$$

s.t　　inclusion、$i : U \longrightarrow X$ に対し、$i_*(b)=a$、$\overline{U}$: compact である。ここで、X は compact でないから、$X \neq \overline{U}$ であり、$^{\exists}x \in X-\overline{U}$ である。ここで、

$$H_n(\overline{U}) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X,\overline{U})\ (=H_n(X,X-(X-\overline{U})))$$

は完全であり、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
H_n(U) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X) \arrow[r, "j^x_{X*}"] \arrow[d, "="'] & H_n(X,X-x) \\
H_n(\overline{U}) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,\overline{U}) \arrow[u, "j^x_{X-\overline{U}*}"']
\end{tikzcd}$$

ただし、写像はすべて inclusion からの誘導である。下列が完全なので、$j^x_{X*}(a)=0$ である。Lemma 0.0.4 により、$^{\forall}x \in X$ に対し、$j^x_{X*}(a)=0$ である。Theorem 0.0.13 により、$a=0$

□