Definition 0.0.1

X を n 多様体とする。$x \in X$ に対し、$H_n(X, X-x) \cong \mathbf{Z}$ であったので、その生成元 w_x をひとつづつ選び、その集合 $\{w_x\}_{x \in X}$ を考える。このとき、$^\forall \alpha \in X$ のに対し、

$$^\exists N : \alpha\text{の近傍}\ ,\ ^\exists w_N \in H_n(X, X-N)$$

s.t $\quad ^\forall x \in N$ で、$j^x_{N*} : H_n(X, X-N) \longrightarrow H_n(X, X-x)$ に対し、$j^x_{N*}(w_N) = w_x$ を満たすとき、$\{w_x\}_{x \in X}$ を X の向き (orientation) と呼ぶ。多様体 X に向きが存在するとき、X は向き付け可能 (orientable) と呼び、向き付け可能な多様体 X に向きが指定されている場合、X を向き付けられた多様体と呼ぶ。

Remmark 0.0.2

X が向き付けられた多様体で、$X \cong Y$ ならば、Y も向き付け可能

proof) $\quad Y$ が多様体になることは以前に示した。また、$X \overset{f}{\cong} Y$ とし、$\{w_x\}_{x \in X}$ を X の向きとすると、$y \in Y$ に対し、$w_y = f(w_{f^{-1}(y)}) \in H_n(X, X-y)$ は生成元であり、$^\forall y \in Y$、$\alpha = f^{-1}(y) \in X$ に対し、

$$^\exists N : \alpha\text{の近傍}\ ,\ ^\exists w_N \in H_n(X, X-N)$$

s.t $\quad ^\forall x \in N$ で、$j^x_{N*} : H_n(X, X-N) \longrightarrow H_n(X, X-x)$ に対し、$j^x_{N*}(w_N) = w_x$

ここで、$M = f(N), w_M = f(w_N) \in H_n(X, X-M)$ とおくと、

$$\begin{tikzcd}
H_n(X, X-N) \arrow[r, "j_N^{f^{-1}(y)}{}_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(X, X-x) \arrow[d, "f_*"] \\
H_n(Y, Y-M) \arrow[r, "j^y_{M*}"'] & H_n(Y, Y-y)
\end{tikzcd}$$

が可換となり、$y \in M$ に対し、$j^y_{M*}(w_M) = w_y$。これより、$\{w_y\}_{y \in Y}$ が Y の向きである。

□

Proposition 0.0.3

$\mathbf{R}^n$ は向き付け可能な多様体である。

proof)　　$w_0 \in H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0)$ を生成元の 1 つとする。$x \in \mathbf{R}^n$ に対し、

$$h : (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0) \longrightarrow (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - x)$$

を同相とし、$w_x = h_*(w_0)$ とする。w_xは生成元である。

$$D = \{ y \in \mathbf{R}^n \mid |y| \leqq 2|x| \ \}$$

とおけば、D は x の近傍である。また、

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - D) \arrow[r, "="] \arrow[d, "j^0_{D*}"'] & H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - D) \arrow[d, "j^x_{D*}"] \\
H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0) \arrow[r, "h_*"'] & H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - x)
\end{tikzcd}$$

が可換であり、j^0_{D*} が同型なので、$w_D = {j^0_{D*}}^{-1}(w_0) \in H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - D)$ とおけば、

$$^\forall x \in D \text{ に対し、} j^x_{D*}(w_D) = w_x$$

であるので、$\{w_x\}_{x \in \mathbf{R}^n}$ は $\mathbf{R}^n$ の向きである。

□

Proposition 0.0.4

X が向き付けられた多様体で、U を X の開部分多様体とすると、U も向き付け可能である。

proof)　　$\{w_x\}_{x \in X}$ を X の向きとする。$x \in U$ に対し、

$$i : (U, U - x) \longrightarrow (X, X - x)$$

を inclusion とすると、切除定理より、

$$i_* : H_*(U, U - x) \xrightarrow{\cong} H_*(X, X - x)$$

であり、$w'_x = i_*^{-1}(w_x)$ とおくと、w'_x は生成元である。また、$^\forall x \in U$ に対し、$x \in X$ であるため、

$$^\exists N : x \text{ の近傍}, \ ^\exists w_N \in H_n(X, X - N)$$

s.t　$j^x_{N*}: H_n(X, X-N) \longrightarrow H_n(X, X-x)$ に対し、$j^x_{N*}(w_N) = w_x$

ここで、$x \in U \cap N$ であるが、ここで、V : open in X で、

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U \cap N$$

であり、$\overline{V}$: compact であるものが存在する。

$$j^{\overline{V}}_{N*}: H_n(X, X-N) \longrightarrow H_n(X, X-\overline{V})$$

に対し、$j^{\overline{V}}_{N*}(w_N) \in H_n(X, X-\overline{V})$ を考える。$w_{\overline{V}} = i_*^{-1} \circ j^{\overline{V}}_{N*}(w_N) \in H_n(U, U-\overline{V})$ とおくと、

$$\begin{tikzcd}
H_n(U, U-\overline{V}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "j^x_{\overline{V}*}"'] & H_n(X, X-\overline{V}) \arrow[d, "j^x_{\overline{V}*}"] \\
H_n(U, U-x) \arrow[r, "\cong"'] & H_n(X, X-x)
\end{tikzcd}$$

の図式が可換であるから、$j^x_{\overline{V}*}(w_{\overline{V}}) = w'_x$ であるため、$\{w'_x\}_{x\in U}$ が U の向きである。

$\square$

Proposition 0.0.5

X, Y が向き付けられた多様体とすると、$X \times Y$ も向き付け可能である。

proof)　　X を n 多様体、Y を m 多様体とする。$\{w_x\}_{x\in X}$, $\{w_y\}_{y\in Y}$ をそれぞれ X, Y の向きとする。$(x, y) \in X \times Y$ に対し、クロス積により $w_x \times w_y \in H_{n+m}(X \times Y, X \times Y - (x, y))$ である。ここで、$H_*(X, X-x)$ は自由であり、$K\ddot{u}nneth$ の定理により、

$$\times: H_*(X, X-x) \otimes H_*(Y, Y-y) \xrightarrow{\cong} H_*(X \times Y, X \times Y - (x, y))$$

ここで、$H_p(X, X-x) = 0 \quad (p \neq n)$, $H_q(Y, Y-y) = 0 \quad (q \neq m)$ であるため、

$$\times: H_n(X, X-x) \otimes H_m(Y, Y-y) \xrightarrow{\cong} H_{n+m}(X \times Y, X \times Y - (x, y))$$

よって、$w_x \times w_y$ は生成元であることがわかる。さらに、${}^\forall(\alpha, \beta) \in X \times Y$ に対し、

$${}^\exists N: \alpha\text{の近傍}\ ,\ M: \beta\text{の近傍}\ ,\ w_N \in H_n(X, X-N)\ ,\ w_M \in H_n(X, X-M)$$

s.t　$(x,y) \in N \times M$ に対し、$j^x_{N*}(w_N) = w_x$, $j^y_{M*}(w_M) = w_y$ であるため、$N \times M$ は (x,y) の近傍で、

$$
\begin{array}{ccc}
H_n(X, X-N) \otimes H_m(Y, Y-M) & \xrightarrow{j^x_{N*} \otimes j^y_{M*}} & H_n(X, X-x) \otimes H_m(Y, Y-y) \\
\downarrow \times & & \downarrow \times \\
H_{n+m}(X \times Y, X \times Y - N \times M) & \xrightarrow[j^{x,y}_{N \times M_*}]{} & H_{n+m}(X \times Y, X \times Y - (x,y))
\end{array}
$$

が可換であり、$j^{x,y}_{N \times M_*}(w_N \times w_M) = w_x \times w_y$ であることがわかる。

これより、$\{w_x \times w_y\}_{(x,y) \in X \times Y}$ が $X \times Y$ の向きである。

□

Proposition 0.0.6

X, Y が多様体で、$X \times Y$ が向き付け可能であるならば、X, Y も向き付け可能である。

proof)　$\{w_{x,y}\}_{(x,y) \in X \times Y}$ を $X \times Y$ の向きとする。X が向き付け可能であることを示す。$^\forall x \in X$ に対し、$y_0 \in Y$ と、生成元 $w_{y_0} \in H_m(Y, Y - y_0)$ を固定する。

$$\times : H_n(X, X-x) \otimes H_m(Y, Y-y_0) \xrightarrow{\cong} H_{n+m}(X \times Y, X \times Y - (x, y_0))$$

であったので、$w_x \times w_{y_0} = w_{x,y_0}$ となる $w_x \in H_n(X, X-x)$ が存在し、これは生成元である。

$^\forall \alpha \in X$ に対し、

$$^\exists N : (\alpha, y_0) \text{ の近傍} ,\ ^\exists w_N \in H_n(X \times Y, X \times Y - N)$$

s.t　$^\forall (x,y) \in N$ で、

$$j^{(x,y)}_{N\ *} : H_n(X \times Y, X \times Y - N) \longrightarrow H_n(X \times Y, X \times -(x,y))$$

に対し、$j^{(x,y)}_{N\ *}(w_N) = w_{x,y}$ である。ここで、

$$^\exists U : \text{open in } X \ ,\ ^\exists V : \text{open in } Y \qquad s.t \qquad (\alpha, y_0) \in U \times V \subset N$$

さらに、$(\alpha, y_0) \in U \times \{y_0\} \subset N$ である。$^\forall x \in U$ に対し、次の図式

$$\begin{tikzcd}
H_{n+m}(X \times Y, X \times Y - N) \arrow[r, "{j_N^{(x,y_0)}}_*"] \arrow[d, "{j_N^{U \times \{y_0\}}}_*"'] & H_{n+m}(X \times Y, X \times Y - (x, y_0)) \arrow[d, "="] \\
H_{n+m}(X \times Y, X \times Y - U \times \{y_0\}) \arrow[r, "{j_{U \times \{y_0\}}^{(x,y_0)}}_*"] & H_{n+m}(X \times Y, X \times Y - (x, y_0)) \\
H_n(X, X - U) \otimes H_m(Y, Y - y_0) \arrow[r, "j_{U*}^x \otimes 1"'] \arrow[u, "\cong"] & H_n(X, X - x) \otimes H_m(Y, Y - y_0) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

は可換となり、$w_{U \times \{y_0\}} = {j_N^{U \times \{y_0\}}}_*(w_N)$ とおけば、

$$w_{U \times \{y_0\}} = w_U \times w_{y_0}$$

となる $w_U \in H_n(X, X - U)$ が存在し、$j_{U*}^x(w_U) = w_x$ を満たす。

これより、X は向き付け可能で、同様にして Y にも向きが存在する。

$\square$

Proposition 0.0.7

S^n は向き付け可能な多様体である。

proof)　　$\mathbf{R}^{n+1} - 0 \cong S^n \times \mathbf{R}$ であり、

$\mathbf{R}^{n+1} - 0$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の開部分多様体なので向き付け可能である。よって、Prop 0.0.6 により、S^n も向き付け可能。

$\square$

Theorem 0.0.8

X は向き付けられた n 多様体で、$\{w_x\}_{x \in X}$ をその向きとする。K を X の compact 集合とすると、$w_K \in H_n(X, X - K)$ で、$^\forall x \in K$ に対し、$j_{K*}^x(w_K) = w_x$を満たすものが一意に存在する。

この証明も各段階を踏まなければ、ならないので以下で条件を限定しつつ進める。

Lemma 0.0.9

X は向き付けられた n 多様体で、$\{w_x\}_{x\in X}$ をその向きとする。K を X の compact 集合とすると、$w_K \in H_n(X, X-K)$ で、$^\forall x \in K$ に対し、$j^x_{K*}(w_K) = w_x$を満たすものが存在すれば、一意に存在する。

proof)　　$w_K, w'_K \in H_n(X, X-K)$ に対し、$^\forall x \in K$ に対し、

$$j^x_{K*}(w_K) = w_x \ , \ j^x_{K*}(w'_K) = w_x$$

を満たすものとする。これより、$j^x_{K*}(w_K - w'_K) = 0$。K は closed であるため、消滅定理により、$w_K - w'_K = 0$ である。よって、$w_K = w'_K$

□

Lemma 0.0.10

X は向き付けられた n 多様体 で、K, L : X の compact 集合に対し、定理を満たす w_K, w_L が存在すれば、$K \cup L$ において、定理を満たす $w_{K\cup L}$ が存在する。

proof)　　$(X, X-K)$, $(X, X-L)$ の Mayer-Vietorice 完全列を考えると、

$$H_n(X, X-(K\cup L)) \xrightarrow{1} H_n(X, X-K) \oplus H_n(X, X-L) \xrightarrow{j} H_n(X, X-(K\cap L))$$

が完全であるが、$x \in K \cap L$ に対し、

$$j^x_{K\cap L*} \circ j^{K\cap L}_{K}{}_*(w_K) = j^x_{K*}(w_K) = w_x$$

$$j^x_{K\cap L*} \circ j^{K\cap L}_{L}{}_*(w_L) = j^x_{L*}(w_L) = w_x$$

であるため、$j^x_{K\cap L*}(j^{K\cap L}_{K}{}_*(w_K) - j^{K\cap L}_{L}{}_*(w_L)) = 0$

$K \cap L$ は closed であるため、消滅定理により、$j^{K\cap L}_{K}{}_*(w_K) - j^{K\cap L}_{L}{}_*(w_L) = 0$ である。よって、

$$j(w_K, -w_L) = j^{K\cap L}_{K}{}_*(w_K) - j^{K\cap L}_{L}{}_*(w_L) = 0$$

であるため、完全列により、$^\exists a \in H_n(X, X-(K\cup L))$　　s.t　　$i(a) = (w_K, w_L)$

これより、$j^K_{K\cup L*}(a)=w_K$, $j^L_{K\cup L*}(a)=w_L$ が成り立つ。$^\forall x\in K\cup L$ に対し、$x\in K$ のときは、

$$j^x_{K\cup L*}(a)=j^x_{K*}\circ j^K_{K\cup L*}(a)=j^x_{K*}(w_K)=w_x$$

また、$x\in L$ に対し、

$$j^x_{K\cup L*}(a)=j^x_{L*}\circ j^L_{K\cup L*}(a)=j^x_{L*}(w_L)=w_x$$

□

Theorem 0.0.11

X は向き付けられた n 多様体で、$\{w_x\}_{x\in X}$ をその向きとする。K を X の compact 集合とすると、$w_K\in H_n(X,X-K)$ で、$^\forall x\in K$ に対し、$j^x_{K*}(w_K)=w_x$を満たすものが一意に存在する。

proof)　　$x\in K$ とする。

$$^\exists N_x : x \text{ の近傍 },\ ^\exists w_{N_x}\in H_n(X,X-N)$$

s.t　$^\forall y\in N_x$で、$j^y_{N_x*}:H_n(X,X-N)\longrightarrow H_n(X,X-y)$ に対し、$j^y_{N_x*}(w_{N_x})=w_y$

X が多様体であるため、x の開近傍 V_x で $\overline{V_x}$がcompact であり、

$$x\in V_x\subset\overline{V_x}\subset N_x$$

を満たすものが存在する。$K\subset\bigcup_{x\in K}V_x$ で、K : compact より、

$$^\exists x_1,x_2,\cdots x_m\in K \qquad s.t \qquad K\subset\bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$$

ここで、$B_i=K\cap\overline{V_{x_i}}$ とおけば、B_iはcompact であり、

$$K=\bigcup_{i=1}^m B_i$$

各 B_i に対し、$x \in B_i$ とすると、$B_i \subset N_{x_i}$ より、

$$\begin{tikzcd}
H_n(X, X - N_{x_i}) \arrow[r, "="] \arrow[d, "j^{B_i}_{N_{x_i}*}"'] & H_n(X, X - N_{x_i}) \arrow[d, "j^{x}_{N_{x_i}*}"] \\
H_n(X, X - B_i) \arrow[r, "j^{x}_{B_i*}"'] & H_n(X, X - x)
\end{tikzcd}$$

が可換となり、$w_{B_i} = j^{B_i}_{N_{x_i}*}(w_{N_{x_i}})$ とおけば、

$$j^{x}_{B_i*}(w_{B_i}) = w_x$$

となる。これより、Lemma　0.0.10 により、帰納法を用いれば題意が証明される。

$\square$

Definition 0.0.12

X を compact で向き付けられた n 多様体とすし、$\{w_x\}_{x \in X}$ をその向きとする。このとき、Theorem　0.0.11 により、$w \in H_n(X)$ で、$^\forall x \in X$ に対し、$j^x_{X*}(w) = w_x$ を満たすものが一意に存在する。この w を X の基本ホモロジー群と呼ぶ。

Theorem 0.0.13

X をcompact で連結な n 多様体で向き付け可能とすると、

$$H_n(X) \cong \mathbf{Z} \quad \text{であり、基本ホモロジー類が生成元である。}$$

proof)　　$x \in X$ を固定し、$a \in H_n(X)$ に対し、$j^x_{X*}(a) = 0$ とすると、

前節の Lemma により、$^\forall y \in X$ に対し、$j^y_{X*}(a) = 0$ である。また、消滅定理により、$a = 0$ である。よって、j^x_{X*} は単射である。また、$\{w_x\}_{x \in X}$ を向きとすると、Theorem 0.0.11 により、生成元である $w_x \in H_n(X)$ に対し、$w \in H_n(X)$ で、$j^x_{X*}(w) = w_x$ となるものが存在するから、j^x_{X*} は全射である。

よって、j^x_{X*} は同型であり、$H_n(X) \cong H_n(X, X - x) \cong \mathbf{Z}$ で、w が生成元である。

$\square$

Theorem 0.0.14

X をcompact で連結な n 多様体で向き付け不可能とすると、$H_n(X) = 0$

Remmark 0.0.15

X をcompact で連結な n 多様体とすると、$H_n(X) = 0$ or $\mathbf{Z}$ であり、

$$H_n(X) \cong \mathbf{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ は向き付け可能}$$

$$H_n(X) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ は向き付け不可能}$$

Proposition 0.0.16

$\mathbf{R}P^n$ は n が奇数の時、向き付け可能で、偶数の時は向き付け不可能である。