多様体

多様体とは曲線や曲面といった私たちの身近にある空間を高次元に、そして抽象化した概念である。局所的に Euclid 空間の構造を持ち、微分・滑らかさといった概念が考えられる。幾何学においては、微分幾何、位相幾何に関わらず、現在においても重要な研究対象となる空間である。多様体の教科書は様々にあるが、有名どころで基礎的な内容がしっかり記述されているのは [松本], [服部], [萩上] あたりだろうか。

定義 0.1. M を Hausdorff 空間とする。M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と連続写像 $\{\varphi_\alpha : U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^m\}$ が与えられ、次の条件を満たすとき、M を（境界のない）m 次元 C^r 級多様体と呼ぶ。

1. $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であって、$\varphi : U_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$ は同相である。
2. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ となる α, β に対しては、

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

   が C^r 級写像である。

開被覆と写像の組 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ を M の局所座標系と呼ぶ。特に $r = 0$ のとき位相多様体、$r = \infty$ のとき滑らかな多様体と呼ぶ。およそ話の主体になるのはこのいずれかである。位相多様体の場合は、C^0 級というのは連続を意味しているので、二つ目の条件は取り外せる。m 次元多様体のことを単に m-多様体と呼ぶこともある。

私たちの身近にある空間はおおよそ多様体の構造を持っている。

例 0.2. 以下で滑らかな多様体の例を紹介する。

1. Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ において、
   (a) 恒等写像 $1_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は座標近傍系を与える。
   (b) 任意の $\mathbb{R}^n$ の開被覆 $\{U_\alpha\}$ を考えると、包含写像 $U_\alpha \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ は座標近傍系となる。
2. 球面 $S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots x_{n+1}^2 = 1\}$ において、
   (a) $U_i^+ = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\}, U_i^- = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\}$ とおく。

$$\varphi_i^\pm : U_i^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1})$$

   により定義すれば、座標近傍系となる。
   (b) また、$U_+ = S^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}, U_S = S^n - \{(0, \cdots, 0, -1)\}$ とそれぞれ北極点、南極点を除いた空間とする。それぞれからの射影（stereo graphic projection）

$$p_\pm : U_\pm \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$$

   により、座標近傍系を与える。
3. 実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/x \sim ax$ に対し、

$$U_i = \{[x_1, \cdots, x_{n+1}] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

   とおき、

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ [x_1, \cdots, x_{n+1}] \mapsto (x_1/x_i, \cdots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \cdots, x_{n+1}/x_i)$$

   で定義すると、これは座標近傍系となり $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は n-多様体である。同様に複素射影空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ は $2n$-多様体である。

4. M を多様体とし、その座標近傍を $\{(U,\varphi)\}$ で表す。その開部分空間 N に対し、$\{(U\cap N, \varphi_{|U\cap N})\}$ は N の座標近傍を与えるため、N を M の開部分多様体と呼ぶ。

5. m-多様体 M と n-多様体 N に対し、それぞれの座標近傍系を $\{(U,\varphi)\}$, $\{(V,\psi)\}$ と書く。このとき、$\{(U\times V, \varphi\times\psi)\}$ は座標近傍を与え、$M\times N$ は $(m+n)$-多様体となる。

このように１つの空間上には複数の多様体構造が存在する。ただ、開被覆や座標写像を少し変えたくらいでは多様体としての性質は変わらない。このことから座標近傍系の同値関係を定義し、その同値類を多様体の構造とみなすのが適当である。

定義 0.3. 空間 M 上の二つの座標近傍系 $\{U,\varphi\}$, $\{V,\psi\}$ が同値であるとは、その和集合 $\{U,\varphi\}\cup\{V,\psi\}$ もまた M の座標近傍系になることである。つまり、$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\longrightarrow\psi(U\cap V)$ が C^∞-写像となることである。これが同値関係となることは容易に確かめられ、この同値関係による同値類を M の多様体構造と呼ぶ。

定義 0.4. 多様体の間の連続写像 $f: M\longrightarrow N$ が滑らかであるとは、任意の $x\in M$ に対し、$x\in U$, $f(x)\in V$ を座標近傍の開集合が存在するが、このとき合成

$$\varphi^{-1}(U\cap f^{-1}(V))\xrightarrow{\varphi^{-1}} U\cap f^{-1}(V)\xrightarrow{f} V\xrightarrow{\psi}\psi(V)$$

が $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ の部分空間上で C^∞ 級であることである。注意として、この定義は座標近傍の選び方によらない。つまり、$x\in U'$, $f(x)\in V'$ と違う座標近傍を選んだとしても、

$$\psi'\circ f\circ\psi=(\psi'\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\varphi'^{-1}):\varphi'(U\cap U'\cap f^{-1}(V\cap V'))\longrightarrow\psi'(V\cap V')$$

は滑らかだからである。さらには同値な座標近傍系の取り方にもよらない。特に、$N=\mathbb{R}$ のときは M 上の滑らかな関数と呼び、それらの集合を $C^\infty(M)$ とおく。

補題 0.5. $f: M\longrightarrow N$, $g: N\longrightarrow L$ が滑らかな写像である時、$g\circ f: M\longrightarrow L$ も滑らかである。

証明 $x\in M$ に対し、$x\in U$, $f(x)\in V$, $g\circ f(x)\in W$ となる座標近傍 (U,φ), (V,ψ), (W,χ) をそれぞれ選ぶ。

$$\chi\circ(g\circ f)\circ\varphi^{-1}=(\chi\circ g\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi)$$

となるため、$g\circ f$ は滑らかである。 □

補題 0.6. $f: M\longrightarrow N$ を多様体間の連続写像とする。このとき、f が滑らかであることと、任意の $g\in C^\infty(N)$ に対し、$g\circ f\in C^\infty(M)$ が滑らかであることは同値。

証明 f が滑らかならば、$g\circ f$ も滑らかであるのは補題 0.5 により成り立つ。逆を示そう。$x\in M$ に対し、$x\in U$, $f(x)\in V$ となる座標近傍 (U,φ), (V,ψ) を取る。今、$\mathrm{p}_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ を i-成分への射影とすると、これは滑らかであり、$p_i\circ\psi$ も滑らかになり $C^\infty(N)$ に属する。仮定より、$p_i\circ\psi\circ f$ は滑らかであり、これは f の各 i 成分が滑らかであることを意味している。つまり f が滑らかである。 □

定義 0.7. 滑らかな多様体と滑らかな写像は補題 0.5 により圏をなす。この圏での同型射を微分同相写像と呼ぶ。

例 0.8. $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の開部分多様体とみなす。自然な射影

$$p:\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}\mathrm{P}^n$$

は滑らかな写像である。これは、$\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ の座標近傍系として $U_i=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\mid x_i\neq 0\}$ とおくと、$p(U_i)$ が $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の座標近傍である。$\psi_i\circ p\circ\varphi_i^{-1}$ は、

$$\mathbb{R}^{n+1}-\mathbb{R}^i\times\{0\}\times\mathbb{R}^{n-i}\longrightarrow\mathbb{R}^n,\ (x_1,\cdots,x_{n+1})\mapsto(x_1/x_i,\cdots,x_{i-1}/x_i,x_{i+1}/x_i,\cdots,x_n/x_i)$$

の制限であるので滑らかである。

例 0.9. 積多様体 $M\times N$ に対し、それぞれの射影 $p_M: M\times N\longrightarrow M$, $p_N: M\times N\longrightarrow N$ は共に滑らかである。これは結局、局所的に射影 $\mathbb{R}^{m+n}\longrightarrow\mathbb{R}^{m(n)}$ を考えているためである。

参考文献

[萩上] 荻上 紘一　共立講座 21 世紀の数学 6 多様体 共立出版 大学数学

[服部] 服部 晶夫　多様体 (岩波全書) [単行本] 岩波書店; 増補版 (1989)

[松本] 松本 幸夫　多様体の基礎 (基礎数学 5) [単行本] 東京大学出版会 (1988)