Morse 関数

多様体の構造を、それ上の関数を用いて解析しようというのが Morse 理論である。ここでは基本的な定義と例、そして話の話題となる臨界点の振る舞いについてみていこう。以下、断らない限り M は滑らかな m 次元の多様体とする。

1 Morse 関数の定義と臨界点

まず始めに滑らかな関数の臨界点について考察する。

定義 1.1. 滑らかな関数 $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し、$p \in M$ が臨界点 (critical point) であるとは、p を含む座標近傍 $(x_1, \cdots, x_m)$ に対し、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

となることである。また、$f(p)$ を p での臨界値と呼ぶ。座標変換の公式から、臨界点の定義は座標の取り方に依存しない。実際、違う座標近傍 $(y_1, \cdots, y_m)$ を選んだとしても、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial y_i}{\partial x_i}(0)\frac{\partial f}{\partial y_j}(p)$$

であるから、$(y_1, \cdots, y_m)$ で臨界点ならば、$(x_1, \cdots, x_m)$ でもそうである。逆に座標を入れ替えれば、$(x_1, \cdots, x_m)$ での臨界点は $(y_1, \cdots, y_m)$ での臨界点でもあるので、結局座標近傍の取り方によらない。

定義 1.2 (Hesse 行列)**.** $p \in M$ の座標近傍を $(x_1, \cdots, x_m)$ とし、f の 2 回微分並べた行列

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p) \end{pmatrix}$$

を、p における f の Hesse 行列と呼ぶ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

であるので、$H_f(p)$ は対称行列である。これは座標近傍の選び方に依存するが、他の座標を選んだ場合は次のような関係式がある。

注意 1.3. $p \in M$ の周りの 2 つの座標近傍 $(x_1, \cdots, x_m)$, $(y_1, \cdots, y_m)$ において、座標変換の公式を用いると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_h \partial y_k} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial y_h}\frac{\partial x_j}{\partial y_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

となる。よって、それぞれの Hesse 行列の間には、

$$H_f^y(p) = {}^t J(p) H_f^x(p) J(p)$$

という関係式がある。ただし、ここで $J(p)_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)$ で与えられる Jacobi 行列である。

定義 1.4 (Morse 関数)**.** f の臨界点 p が退化しているとは、$\det H_f(p) = 0$ であることをいう。Jacobi 行列は T_pM での基底変換なのだから正則であり、注意 1.3 により、$\det H_f^x(p) = 0$ と $\det H_f^y(p) = 0$ は同値である。よって、臨界点が退化しているか、否かは座標近傍の取り方に依存しない。すべての臨界点が非退化であるような関数を Morse 関数と呼ぶ。

非退化な臨界点というのは、高校生までの微積でいうところの極値である。微分して 0 になる点を探り、２回微分までしてようやく極致の判定をくぐる過程である。

例 1.5. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ における臨界点 $p \in \mathbb{R}$ とは、$f'(p) = 0$ となることであり、非退化であるとは $f''(0) \neq 0$ となることである。例えば、$f(x) = x^2$ において $x = 0$ は非退化な臨界点であるが、$f(x) = x^3$ においては $x = 0$ は退化した臨界点である。

例 1.6. $f, g, h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ、$f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2 - y^2$, $h(x, y) = -x^2 - y^2$ とすると、いずれも $(0, 0)$ が臨界点である。Hesse 行列を計算してみると、

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ H_h(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

であるので、いずれも非退化である。

例 1.7. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ も $(0, 0)$ が臨界点で、

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、非退化である。この関数は、例 1.6 の $g(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$ において、

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

と座標変換したものである。この視点から Jacobi 行列を計算して、

$$J(0,0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$H_f(0,0) = {}^tJ(0,0) H_g(0,0) J(0,0) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とも計算できる。

例 1.8. $f(x, y) = x^2 + y^3$ は $(0, 0)$ が臨界点であるが、Hesse 行列は、

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるため、退化している。

Morse の発見した驚くべき事実は、Morse 関数の臨界点付近での近傍における表記は、例 1.6 のように 2 乗の和・差の形で表せることである。これにより臨界点近くでの関数の振る舞いが非常にとらえやすくなっている。この事実を証明することを目指そう。

補題 1.9. f の臨界点 p の周りの任意の座標近傍 $(x_1, \cdots, x_m)$ に対し、

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i g_i(x_1, \cdots, x_m)$$

となる滑らかな関数 g_i が存在する。

証明 今、臨界点 p は座標近傍における原点 $(0, 0, \cdots, 0)$ に対応しているとする。

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \cdots, tx_m)}{dt} = \int_0^1 x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \cdots, tx_m) dt$$

であることが、変数変換の偏微分の公式から導かれる。

$$g_i(x_1, \cdots, x_m) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \cdots, tx_m) dt$$

とおけば、求める式が得られる。 □

定理 1.10. Morse 関数 f の臨界点 p の周りで、

$$f(x_1, \cdots, x_m) = -x_1^2 - \cdots - x_{\lambda(p)}^2 + x_{\lambda(p)+1}^2 + \cdots + x_m^2 + f(p)$$

となるような座標近傍が存在する。

証明 今、必要ならば f を平行移動し、$f(x) - f(p)$ と置き換えて $f(p) = 0$ と仮定してよい。補題 1.9 により、

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i g_i(x_1, \cdots, x_m)$$

と書け、p が臨界点であるから、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \cdots, 0) = g_i(0, \cdots, 0) = 0$$

であることがわかる。よって、g_i に補題 1.9 の議論を持ち込めば、

$$g_i(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{j=1}^{m} x_j h_{ij}(x_1, \cdots, x_m)$$

と書くことができる。よって、

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i x_j h_{ij}(x_1, \cdots, x_m)$$

今、$H_{ij} = (h_{ij} + h_{ji})/2$ で置き換えると、

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i x_j H_{ij}(x_1, \cdots, x_m)$$

となり、$H_{ij} = H_{ji}$ である。これを f の 2 次形式表示と呼んだりする。この式で、原点での 2 回微分を考えると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0, \cdots, 0) = 2H_{ij}(0, \cdots, 0)$$

であることがわかる。p が非退化であるということは、$\det H_{ij} \neq 0$ であるが、このことから必要に応じて座標近傍を線形変換（座標を入れ替えたり、$X_1 = x_1 + x_2$ で置き換えたり）することにより、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0, \cdots, 0) \neq 0$$

とできる。よって、$H_{11}(0, \cdots, 0) \neq 0$ である。H_{11} の連続性から、原点付近の小さな近傍上で $H_{11}(x_1, \cdots, x_m) \neq 0$ である。そこで、

$$X_1 = \sqrt{|H_{11}|}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{m} x_i \frac{H_{1i}}{H_{11}}\right)$$

とおき、新たな座標近傍 $(X_1, x_2, \cdots, x_m)$ を考える。これと、$(x_1, \cdots, x_m)$ との間の Jacobi 行列 J を考えると、$\det J_{(0,\cdots,0)} \neq 0$ であることがわかるので、確かに $(X_1, x_2, \cdots, x_m)$ は p の座標近傍である。

$$X_1^2 = |H_{11}|\left(x_1 + \sum_{i=2}^{m} \frac{H_{1i}}{H_{11}}\right)^2 = \begin{cases} H_{11}x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{m} x_1 x_i H_{1i} + \left(\sum_{i=2}^{m} x_i H_{1i}\right)^2/H_{11} & (H_{11} > 0) \\ -H_{11}x_1^2 - 2\sum_{i=2}^{m} x_1 x_i H_{1i} - \left(\sum_{i=2}^{m} x_i H_{1i}\right)^2/H_{11} & (H_{11} < 0) \end{cases}$$

これを先の f の 2 次形式表示と比較すると、

$$f = \begin{cases} X_1^2 + 2\sum_{i,j=2}^{m} x_i x_j H_{ij} - \left(\sum_{i=2}^{m} x_i H_{1i}\right)^2/H_{11} & (H_{11} > 0) \\ -X_1^2 + 2\sum_{i,j=2}^{m} x_i x_j H_{ij} - \left(\sum_{i=2}^{m} x_i H_{1i}\right)^2/H_{11} & (H_{11} < 0) \end{cases}$$

と書き直せる。初項以下は、$(x_2, \cdots, x_m)$ からなっているので、同様の議論でどんどんと 2 乗の項を輩出し、変数を減らしていける。帰納的に $(X_1, \cdots, X_m)$ という座標近傍が得られ、これらの 2 乗の和・差の形で表記できるが、座標を入れ替える変換を施して、前方に $-X_i^2$ の項をそろえることができる。この符号を決定するのは、最初ならば H_{11} であるが、後半はより複雑になる。しかし、それは H_{ij} らの式であり Hesse 行列の対角化の操作であることに気づく。よって臨界点の指数により、符号が切り替わる。 □

系 1.11. 上記のような座標近傍内では、臨界点は p しかない。よって非退化な臨界点は孤立している。

系 1.12. コンパクトな多様体上の Morse 関数は有限個の臨界点を持つ。

参考文献

[松本] 松本 幸夫　岩波講座　現在数学の基礎　 Morse 理論の基礎（1997）

[横田] 横田 一郎　多様体とモース理論 現代数学社 (1978)