Morse 理論

Morse 関数から、多様体の構造（概形）を求めようというのが Morse 理論である。Morse 関数というのは、ある種多様体の「高さ」を対応させる関数とみなせる。例えば多様体表面（曲面）に付いた水滴は、重力により高い位置から低い位置へ流れ落ちていく。これが勾配ベクトル場、あるいはそれに付随する勾配フローである。その中で水滴が流れ落ちない点、留まる点というものがあるが、それが Morse 関数の臨界点に対応する。以下、M は滑らかで境界のないコンパクトな多様体とする。

1 勾配ベクトル場

Morse 理論を扱う上で重要なのが勾配ベクトル場と呼ばれるベクトル場である。

定義 1.1. U を M の座標近傍、$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする。

$$\mathrm{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_m}$$

という U 上のベクトル場を f の勾配ベクトル場と呼ぶ。

ベクトル場により関数を微分する操作があった。関数 f の勾配ベクトル場で f を微分すると、

$$\mathrm{grad}(f) \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial f}{\partial x_m} = \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \geqq 0$$

ということがわかる。

補題 1.2. $\mathrm{grad}(f)(x) = 0$ であることと、$x \in U$ が臨界点であることは同値である。

証明 まず $x \in U$ が臨界点であれば、すべての i に対し、$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ である。よって、任意の関数 $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し、

$$(\mathrm{grad}(f) \cdot g)(x) = (\mathrm{grad}(f)(x))(g) = \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) = 0$$

となる。これより、$\mathrm{grad}(f)(x) = 0 \in T_xU$ である。逆に、$\mathrm{grad}(f)(x) = 0$ であるならば、

$$(\mathrm{grad}(f) \cdot f)(x) = \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^2 = 0$$

これより、各 i について $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ となる。 □

つまり、勾配ベクトル場というのは臨界点では止まり、それ以外では f の増加する方向を向いていることを意味している。特に f が Morse 関数でその臨界点付近のある座標近傍上では、

$$f(x) = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2$$

という形をしているので、

$$\mathrm{grad}(f) = -2x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \cdots - 2x_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda} + 2x_{\lambda+1}\frac{\partial}{\partial x_\lambda} + \cdots + 2x_m\frac{\partial}{\partial x_m}$$

となる。さらに付随する 1 変数助変換（積分曲線、勾配フロー）は、$\gamma_x'(t) = \mathrm{grad}(f)(\gamma_x(t)),\ \gamma_x(0) = x$ の微分方程式を解くと、

$$\gamma_x(t) = (x_1e^{-2t}, \cdots, x_\lambda e^{-2t}, x_{\lambda+1}e^{2t}, \cdots, x_me^{2t})$$

であることがわかる。

さて、問題は $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ という Morse 関数が与えられたとき、上記のような性質もつベクトル場が M 全体に拡張できるかということである。アイデアはもちろん各近傍上で勾配ベクトル場を考え、それを張り合わせるわけである。

定義 1.3. Morse 関数 $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し、次の２つの条件を満たすベクトル場 $\mathrm{grad}(f)$ を上向きベクトル場、あるいは勾配状ベクトル場と呼ぶ。

1. 臨界点以外では、$\mathrm{grad}(f) \cdot f > 0$

2. 臨界点 $p \in M$ の座標近傍 U で、

$$f(x) = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2$$

という形で表されるもののうち、それ上で

$$\mathrm{grad}(f) = -2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cdots - 2x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + 2x_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + \cdots + 2x_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

と表されるものが存在する。

定理 1.4. コンパクトな多様体 M において、Morse 関数 $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ の勾配上ベクトル場が存在する。

証明 まず、各臨界点 p に対し、座標近傍 $p \in U_p$ で f が標準形で表され、$p \neq q$ ならあ、$U_p \cap U_q = \phi$ となるものを取る。このとき、半径 $\varepsilon_p, 2\varepsilon_p$ の円盤を U_p 内で取っておく。

$$D(\varepsilon_p) \subset D(2\varepsilon_p) \subset U_p$$

また、$x \in M - \bigcup_p \mathrm{Int} D(\varepsilon_p)$ に対し、座標近傍 U_x の中で同様に円盤、

$$D(\varepsilon_x) \subset D(2\varepsilon_x) \subset U_x$$

を考える。半径を調整することにより、$D(2\varepsilon_x)$ の中には臨界点を含まないように取ることができる。M のコンパクト性から有限個の $D(2\varepsilon_x)$ と $D(2\varepsilon_p)$ たちで M は覆える。

面倒な手順で被覆を選んだが、結局有限個の円盤により、

$$M = D(2\varepsilon_1) \cup \cdots \cup D(2\varepsilon_k)$$

で覆われ、さらに任意の臨界点 p はどこか一つの $D(\varepsilon_j)$ に属し、十分小さな開近傍 $p \in V \subset D(\varepsilon_j)$ に対し、$i \neq j$ ならば、$V \cap D(2\varepsilon_i) = \phi$ とすることができる。

今、$M = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ という開被覆でも覆われている。各 U_j 上では f の勾配ベクトル $\mathrm{grad}_j(f)$ が定義されるが、$U_i \cap U_j$ 上で、一般的に $\mathrm{grad}_i(f) \neq \mathrm{grad}_j(f)$ でないので M 上に拡張できないのが問題である。そこで、以下のような関数 $h_j : M \longrightarrow \mathbb{R}$ を考える。まず、$k_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$k(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{t-\varepsilon_j}} & t > \varepsilon_j \\ 0 & t \leqq \varepsilon_j \end{cases}$$

で定義し、$G_j(t) = 1 - \dfrac{k(t)}{k(t) + k(3\varepsilon_j - t)} \in [0,1]$ とおく。$h_j : U_j \longrightarrow \mathbb{R}$ を、$G_j(|x|)$ によって定義すれば、これは $D(\varepsilon_j)$ 内では 1, $U_j - D(2\varepsilon_j)$ 上では 0 となっている滑らかな関数である。これを $M - U_j$ 上でも 0 と定義して、$h_j : M \longrightarrow \mathbb{R}$ が定義できる。このとき、$\mathrm{grad}(f) = \sum_j h_j \mathrm{grad}_j(f)$ によって M 上のベクトル場を定義する。

$$\mathrm{grad}(f) \cdot f = \sum_j h_j \mathrm{grad}_j(f) \cdot f \geqq 0$$

となるのは、$\mathrm{grad}_j(f) \cdot f \geqq 0$ と、$h_j : M \longrightarrow [0,1]$ であることを考えればわかる。また、先の円盤での被覆の仕方を考えれば、臨界点以外では 0 にはならず、臨界点の周りの小さな近傍では、勾配ベクトルそのものになっている。 $\square$

よって Morse 関数から、M 上での勾配状ベクトル場というものは、開被覆の取り方などに依存して一意的には決まらないが、存在はしているということである。よって、勾配ベクトル場と同様に以下のことが示される。

系 1.5. $\mathrm{grad}(f)$ を f の勾配状ベクトル場とすると、$\mathrm{grad}(f)(p) = 0 \in T_pM$ であることと、p が臨界点であることは同値である。よって、$\mathrm{grad}(f)$ に付随する勾配フロー（積分曲線）は、高い位置にある臨界点から始まり、低い位置の臨界点へと流れていく曲線である。

2 ハンドル分解

さて、Morse 関数を使って多様体をブロックに分解してしまおうというのがハンドル分解である。あるいは、その概念を用いて、多様体と同じホモトピー型を持つ CW 複体も構成できる。

定義 2.1. $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ を閉多様体上の Morse 関数とする。このとき、$t \in \mathbb{R}$ に対し、

$$M(t) = \{x \in M \mid f(x) \leqq t\}$$

と定義する。また、

$$M[s,t] = \{x \in M \mid s \leqq f(x) \leqq t\}$$

とおく。

これは、M の高さ t 以下の部分を見ているわけである。Morse 理論の胆は、これが臨界値の前後でどのように変化したのかを観察することである。その前にまず、臨界点を超えない部分ではどうなのかを考察する。

命題 2.2. 閉区間 $[a,b]$ の中に、f の臨界値を含まないとする。このとき、$M[a,b]$ は $f^{-1}(a) \times I$ と微分同相である。

証明 今、$\mathrm{grad}(f)$ を M 上の勾配上ベクトル場とする。臨界点を除いた開部分多様体上で、

$$X_f = \frac{\mathrm{grad}(f)}{\mathrm{grad}(f) \cdot f}$$

というベクトル場を定義する。$M[a,b]$ には臨界点が含まれていないので、このベクトル場は $M[a,b]$ 上にも載っている。今、$p \in f^{-1}(a)$ に対し、そこを通過する勾配フローを γ_p とすると、

$$\frac{d}{dt}\left(f(\gamma_p(t))\right) = \frac{d\gamma_p}{dt} \cdot f = X_f \cdot f = 1$$

なので、γ_p は一定の速度 1 で f の値に関し、上昇していく。結果、上記を t で積分し、$\gamma_p(0) = a$ であることを考えれば、$f(\gamma_p(t)) = t + a$ である。よって、$f(\gamma_p(0)) = a$, $f(\gamma_p(b-a)) = b$ となり、$\gamma_p(0) \in f^{-1}(a)$, $\gamma_p(b-a) \in f^{-1}(b)$ である。これより、$t \in [0, b-a]$ に対し、$\gamma(t) \in M[a,b]$ であることがわかった。よって、

$$f^{-1}(a) \times [0, b-a] \longrightarrow M[a,b]$$

が、$(p,t) \mapsto \gamma_p(t)$ により与えられる。γ が 1 変数助変換であることから、これは微分同相である。また、$f^{-1}(a) \times [b-a] \cong f^{-1}(a) \times I$ であることから題意が示される。 □

上記から直ちにわかるのは、区間 I を押しつぶして、変形レトラクションを得られるということである。

系 2.3. 閉区間 $[a,b]$ の中に、f の臨界値を含まないとする。このとき、$M(a)$ は $M(b)$ の変形レトラクトである。

証明 $M(b) = M(a) \cup M[a,b]$ であり、$M[a,b] \cong M[a,a] \times I \simeq M[a,a]$ であるため。 □

実際にはレトラクトだけでなく、微分同相まで言えてしまう。

定理 2.4. 閉区間 $[a, b]$ の中に、f の臨界値を含まないとする。このとき、$M(a)$ と $M(b)$ は微分同相である。

証明 臨界点が有限個しかないので、十分小さな $\varepsilon > 0$ で、$[a-\varepsilon, b]$ の中にも臨界値が含まないようにとれる。

$$M(a) = M(a-\varepsilon) \cup M[a-\varepsilon, a] \cong M(a-\varepsilon) \cup \left(f^{-1}(a-\varepsilon) \times I\right) \cong M(a-\varepsilon) \cup M[a-\varepsilon, b] = M(b)$$

である。 □

さて、以上の事から多様体は臨界点を超えない限りでは形が変化しないということがわかった。では次に臨界点を超えるとどうなるかを考察してみよう。

定義 2.5. $0 \leqq \lambda \leqq m$ に対し、m-次元の λ-ハンドルとは、円盤の直積

$$H(\lambda) = D^\lambda \times D^{m-\lambda}$$

のことである。$H(\lambda)$ の部分空間、$D^\lambda \times \{0\}$ のことをハンドルの心棒（core）と呼び、逆に $\{0\} \times D^{m-\lambda}$ を余心棒（cocore）と呼ぶ。

定理 2.6. 臨界点 $p \in M$ に対し、その臨界値 $f(p) = c$、指数を $\mathrm{ind}(p) = \lambda$ とおく。今、c はただ唯一の臨界値とする（ほかの臨界点はほかの臨界値を取るとする）。十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し、

$$M(c+\varepsilon) \cong M(c-\varepsilon) \cup H(\lambda)$$

という微分同相が存在する。

証明 まず、p の座標近傍で、f が標準形

$$f(x) = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 + c$$

で表されるものを取る。$\varepsilon > 0$ を、$M[c+\varepsilon, c-\varepsilon]$ の中には p 以外臨界点を含まない範囲で、かつ $M(c-\varepsilon) \cap U = \phi$ となるぐらい十分小さくとる。このとき、

$$M(c-\varepsilon) \cap U \cong \{(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 \leqq -\varepsilon\}$$

このとき、$0 < \delta < \varepsilon$ という小さな実数を取り、p の近傍で、

$$H = \{(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \cdots + x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 - \cdots - x_m^2 \leqq \varepsilon, x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 \leqq \delta\}$$

という空間を考える。

$$M(c-\varepsilon) \cap H = \{(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \cdots + x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 - \cdots - x_m^2 = \varepsilon, x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 \leqq \delta\}$$

なので、$M(c-\varepsilon) \cup H$ はこの部分で張り付いている。このとき、

$$H \longrightarrow D^\lambda(\sqrt{\varepsilon}) \times D^{m-\lambda}(\sqrt{\delta}) \cong H(\lambda)$$

を、$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \left(\dfrac{\sqrt{\varepsilon}\mathbf{x}}{\sqrt{|\mathbf{y}|^2 + \varepsilon}}, \mathbf{y}\right)$ により定義すれば、同相となり、上記の同相により張り付き写像

$$\varphi_p : \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \longrightarrow \partial M(c-\varepsilon) = f^{-1}(c-\varepsilon)$$

を得る。さて、一つ注意なのはこの貼り付け方では、貼り付けた部分で滑らかさが失われてしまっていることである。そこで、平坦化という操作を行う。これは H における $|\mathbf{y}|^2 \leqq \delta$ と、$M(c-\varepsilon)$ における $|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 \leqq \varepsilon$ の部分に着目し、以下のような関数を考える。まず、$\sqrt{\varepsilon + \delta} < a$ を適当にとり、定理 1.4 で行ったように、$h : \mathbb{R}^\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ で

1. $0 \leqq h(x) \leqq 1$

2. $|x| \leqq \sqrt{\varepsilon}$ に対し、$h(x) = 0$

3. $|x| \geqq a$ に対し、$h(x) = 1$

となる滑らかな関数を取っておく。このとき、

$$H' = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{m-\lambda} - M(c-\varepsilon) \mid h(\mathbf{x})(|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2) + (1-h(\mathbf{x}))|\mathbf{y}|^2 \leqq h(\mathbf{x})\varepsilon + (1-h(\mathbf{x}))\delta \leqq \delta\}$$

とおけば、

$$M(c-\varepsilon) \cup H' = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid h(\mathbf{x})(|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2) + (1-h(\mathbf{x}))|\mathbf{y}|^2 \leqq h(\mathbf{x})\varepsilon + (1-h(\mathbf{x}))\delta \leqq \delta\}$$

は境界を持つ滑らかな多様体であり、$H' \cong H$ であることから、$M(c-\varepsilon) \cup H' \cong M(c-\varepsilon) \cap H(\lambda)$ である。あとは、p の近傍における勾配ベクトル場、および付随する勾配フローを利用し、定理 2.2 と同様に証明する。注意としては勾配ベクトルの速度を調整することである。定理 2.2 では速さ 1 で上昇するようにベクトル場を調整したが、今回の場合、$M(c-\varepsilon) \cup H'$ の中で、$x \in \partial M(c-\varepsilon) - H'$ では 2ε 秒後に $\partial M(c+\varepsilon)$ に到達するが、$x \in \partial H' - M(c-\varepsilon)$ ではそれよりも速く $\partial M(c+\varepsilon)$ に到達してしまう。この速度を調節したベクトル場を考え、定理 2.2 と同様に積分曲線で流せば、一定時間後に $M(c-\varepsilon) \cup H'$ は $M(c+\varepsilon)$ になるようにできる。 □

系 2.7 (ハンドル分解)**.** M は以下のようなハンドルを張り合わせた多様体と微分同相である。

$$M \cong H(\lambda_0) \cup H(\lambda_1) \cup \cdots \cup H(\lambda_k)$$

ただし、$p_0, \cdots, p_k$ を臨界点、$\lambda_i = \mathrm{ind}(p_i)$ をそれぞれの指数とする。

Proof. 今、臨界値の小さい順に $p_0, \cdots, p_k$ で、それぞれの臨界値を c_i と表したとき、

$$c_0 < \cdots < c_k$$

という順序で並んでいるとする。また、各臨界点 p_i の指数を λ_i とする。$0 \leqq i \leqq k$ による帰納法で示していく。まず、p_0 の臨界値 c_0 は f の最小値である。これはもし、$f(x) < c_0$ となる点 $x \in M$ が存在すると、ここを通る勾配フローの始点の臨界点は c_0 よりも小さな臨界値を持ってしまうからである。よって、p_0 を終点に持つ勾配フローも存在しないので、$\mathrm{ind}(p_0) = 0$ である。これより、$M(c_1 + \varepsilon)$ は 0-ハンドル D^m と同一視できる。次に、

$$M(c_i + \varepsilon) \cong H(\lambda_0) \cup \cdots \cup H(\lambda_i)$$

とハンドルの張り合わせで表されたとしよう。このとき、定理 2.4 により、

$$M(c_i + \varepsilon) \cong M(c_{i+1} - \varepsilon)$$

となることがわかる。また、定理 2.6 より、

$$M(c_{i+1} + \varepsilon) \cong M(c_{i+1} - \varepsilon) \cup H(\lambda_{i+1})$$

であったので、$M(c_{i+1} + \varepsilon)$ もまたハンドルの張り合わせであらわされる。よって、

$$M \cong H(\lambda_0) \cup H(\lambda_1) \cup \cdots \cup H(\lambda_k)$$

である。 □

上記の分解を M のハンドル分解と呼ぶ。正確には貼り付け方もきちんと指定した方がよい。ハンドル分解を通じて多様体の成り立ちがおおよそ見えてくる。以下で M の胞体分割について考察する。その際、Morse 関数 $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ は各臨界点について次を満たすものとする。

1. $\mathrm{ind}(p_i) < \mathrm{ind}(p_j)$ ならば、$f(p_i) < f(p_j)$

2. $\mathrm{ind}(p_i) = \mathrm{ind}(p_j)$ ならば、$f(p_i) = f(p_j)$

正確に言うならば、任意の Morse 関数は、臨界点の個数や指数を変えずに、上記の性質を満たすように取り換えることができる。この仮定を踏まえて次の定理を紹介する。

定理 2.8. M と同じホモトピー型を持つ有限胞複体で、各胞体 e_i が臨界点 p_i と 1 対 1 に対応し、$\dim(e_i) = \mathrm{ind}(p_i)$ となるものが存在する。

証明 今、臨界点を

$$p_1^0, \cdots, p_{k_0}^0, p_1^1, \cdots, p_{k_1}^1, \cdots, p_1^m, \cdots, p_{k_m}^m$$

とおき、$\mathrm{ind}(p_i^j) = j$ であるとする。また、

$$c_i = f(p_1^i) = f(p_2^i) = \cdots = f(p_{k_i}^i)$$

という指数 i の臨界点の臨界値としておく。指数 i に関する帰納法で示す。まず、$M(c_0 + \varepsilon)$ は 0-ハンドル D^m の直和と同相でそれぞれ可縮であるから、0-胞体からなる胞複体とホモトピー同値である。続いて、$M(c_i + \varepsilon)$ が題意のような胞複体とホモトピー同値であるとする。つまり、$M(c_i + \varepsilon)$ は i-次元の胞複体 X_i のホモトピー型を持つとする。ここで、$M(c_i + \varepsilon) \cong M(c_{i+1} - \varepsilon)$ であり、

$$M(c_{i+1} + \varepsilon) \cong M(c_{i+1} - \varepsilon) \cup H_1(\lambda_{i+1}) \cup H_2(\lambda_{i+1}) \cup \cdots H_{k_{i+1}}(\lambda_{i+1})$$

と λ_{i+1}-ハンドルらを一気に張り合わせたものと微分同相である。このとき、各ハンドルは境界 $\partial D^{\lambda_{i+1}} \times D^{m-\lambda_{i+1}}$ で単射により張り合わさっているため、

$$D^{\lambda_{i+1}} \times D^{m-\lambda_{i+1}} \simeq D^{\lambda_{i+1}} \times \{0\} = D^{\lambda_{i+1}}$$

の変形レトラクションを考えると、

$$M(c_{i+1} + \varepsilon) \simeq M(c_{i+1} - \varepsilon) \cup D_1^{\lambda_{i+1}} \cup \cdots \cup D_{k_i}^{\lambda_{i+1}}$$

となり、λ_{i+1}-胞体がその境界で張り合わさっている。よって、

$$M(c_{i+1} + \varepsilon) \simeq X_i \cup D_1^{\lambda_{i+1}} \cup \cdots \cup D_{k_i}^{\lambda_{i+1}}$$

となり、右側の空間は $(i+1)$-次元の胞複体であり、$(i+1)$-次元の胞体 $D_j^{\lambda_{i+1}}$ には、臨界点 p_j^{i+1} が対応し、その次元と指数も一致している。 □

有限胞複体のオイラー標数がその胞体の枚数の交代和で表される事実から、多様体のオイラー標数は臨界点の個数によってただちに求まる。

系 2.9. 指数 i の臨界点の個数を k_i とおくと、M のオイラー標数は

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i k_i$$

となる。

参考文献

[松本] 松本 幸夫　岩波講座　現在数学の基礎　Morse 理論の基礎（1997）

[横田] 横田 一郎　多様体とモース理論 現代数学社 (1978)