## Lemma 0.0.1

位相空間 $X$ に対し、$f : X \longrightarrow S^n$ が全射でなければ、$f$ は定値写像と homotopic である。

proof)　　仮定より、$^\exists x \in S^n \quad s.t \quad f(X) \subset S^n - \{x\}$ であるが、

$S^n - \{x\}$ は可縮である。ここで、$H : (S^n - \{x\}) \times I \longrightarrow S^n - \{x\}$ を homotopy とし、$i : S^n - \{x\} \longrightarrow S^n$ を inclusion として、

$$G = i \circ H \circ f \times I : X \times I \longrightarrow S^n$$

とすれば、これは $f$ と定値写像を繋ぐ homotopy となる。

□

## Lemma 0.0.2

$X$ は compact で向き付けられた $n$ 多様体とし、$K$ はその閉集合で、$U$ をその開近傍で retract とする。$r : U \longrightarrow K$ を retraction とするとき、

$$r^* : H^m(K) \longrightarrow H^m(U)\ ,\ D_U^K : H^m(U) \longrightarrow H_{n-m}(X, X - K)$$

を考えたとき、これらの合成、

$$D_U^K \circ r^* : H^m(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X - K)$$

は同型である。

proof)　　仮定より、

$$\mathrm{colim} i_K^{U\,*} : H_X^m(K) \longrightarrow H^m(K)$$

は同型であり、また $X$ は compact であるため、$K$ も compact であるため、双対定理から、

$$D^K : H_X^m(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X - K)$$

も同型である。ここで、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
H^m(K) \arrow[r, "r^*"] & H^m(U) \arrow[d, "D_U^K"] \arrow[dl, "t"'] \\
H_X^m(K) \arrow[u, "\mathrm{colim} i_K^{U\,*}"] \arrow[r, "D^K"'] & H_{n-m}(X, X - K)
\end{tikzcd}$$

ここで、右下は可換である。さらに、 $\mathrm{colim} i_K^{U\,*} \circ t \circ r^* = 1$ であり、このことから、

$$\begin{tikzcd} H^m(K) \arrow[r, "r^*"] & H^m(U) \arrow[d, "D_U^K"] \\ H_X^m(K) \arrow[u, "\mathrm{colim} i_K^{U\,*}"] \arrow[r, "D^K"'] & H_{n-m}(X, X-K) \end{tikzcd}$$

は可換であり、

$$D_U^K \circ r^* : H^m(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

は同型である。

$\square$

**Theorem 0.0.3** *Alexander* 双対定理

$S^n$ の閉集合 $K$ に対し、$K \neq \phi, S^n$ とする。$K$ の近傍で retract である $W$ が存在するならば、

$$\widetilde{H}^{n-m}(K) \cong H_{m-1}(S^n - K)$$

proof) $i : S^n - K \longrightarrow S^n$ を inclusion とすると、$S^n - K \neq S^n$ であるため、$i$ は全射ではない。よって、Lemma 0.0.1 により、$i$ は定値写像と homotopic である。つまり、$i_*$ は 0 写像。ここで、$(S^n, S^n - K)$ の被約完全列、

$$\widetilde{H}_m(S^n - K) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_m(S^n) \xrightarrow{j_*} H_m(S^n, S^n - K) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{m-1}(S^n - K) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_m(S^n)$$

に対し、$i_*$ は 0 写像なので、$j_*$ が単射で、$\partial_*$ が全射であることがわかる。これより、

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_m(S^n) \xrightarrow{j_*} H_m(S^n, S^n - K) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{m-1}(S^n - K) \longrightarrow 0$$

が、完全となる。次に以下のように場合わけする。

$n \neq m$ のとき、$\widetilde{H}_m(S^n) = 0$ であるため、上の完全列より、

$$H_m(S^n, S^n - K) \cong \widetilde{H}_{m-1}(S^n - K)$$

$S^n$ は compact な多様体であるため、Lemma 0.0.2 により、

$$H^{n-m}(K) \cong H_m(S^n, S^n - K)$$

これより、また、$n - m \neq 0$ であるため、$\widetilde{H}^{n-m}(K) = H^{n-m}(K)$ なので、

$$\widetilde{H}^{n-m}(K) \cong H_{m-1}(S^n - K)$$

また、$n=m$ のとき、$\widetilde{H}^0(K)\cong H_{n-1}(S^n-K)$ を示す。

　$n=0$ のとき、$S^0$ は二点空間であり、その空でない真の閉部分集合 $K$ は一点空間以外ない。よって、$S^0-K$ も一点空間である。これより、

$$\widetilde{H}^0(K)\cong H_{-1}(S^0-K)=0$$

$n>0$ のとき、開集合 $U$ で、$A\subset U\subset W$ であり、

$$\begin{tikzcd}
H^0(S^n) \arrow[r, "="] \arrow[d, "i^*"'] & H^0(S^n) \arrow[r, "\cap w"] \arrow[d, "i_U^{S^n *}"'] & H_n(S^n) \arrow[d, "j_*"] \\
H^0(K) \arrow[r, "r^*"'] & H^0(U) \arrow[r, "D_K^U"'] & H_n(S^n, S^n-K)
\end{tikzcd}$$

の左側を可換にするものが存在することは、ANR と cohomology,colimit についての関係で示した。また、右側は可換であり、$\cap w$ は Poincare 双対定理より同型。また、Lemma　0.0.2 により、$D_K^U\circ r^*$ も同型。よって、Coker $i^*\cong$ Coker $j_*$

　先の完全列より、

$$\mathrm{Coker}j_*=H_n(S^n,S^n-K)/\mathrm{Im}j_*=H_n(S^n,S^n-K)/\mathrm{Ker}\partial_*\cong\mathrm{Im}\partial_*=\widetilde{H}_{n-1}(S^n-K)$$

であり、一方 Coker$i^*$ を考えるが、

　$*\in K$ を取ると、$(S^n,*)$ , $(K,*)$ のコホモロジー完全列の一部を見ると、

$$0\longrightarrow H^0(S^n,*)\longrightarrow H^0(S^n)\xrightarrow{\cong}H^0(*)$$

$$0\longrightarrow H^0(K,*)\longrightarrow H^0(K)\longrightarrow H^0(*)$$

において、$S^n,*$ がともに弧状連結なので、最初の完全列の右側は同型である。次の可換図を考える。

$$\begin{tikzcd}
H^0(S^n,*) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"'] & H^0(S^n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "i^*"'] & H^0(*) \arrow[d, "="] \\
H^0(K,*) \arrow[r] & H^0(K) \arrow[r] & H^0(*)
\end{tikzcd}$$

$H^0(S^n, 0) = 0$ であるから、このことを考えると、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "単"] \arrow[d, "単"'] & H^0(S^n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "単"'] & H^0(*) \arrow[d, "="] \\
H^0(K,*) \arrow[r, "単"] & H^0(K) \arrow[r, "全"] & H^0(*)
\end{tikzcd}$$

ここでさらに、この下に縦列の写像の Coker を構成して列を作ることができる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "単"] \arrow[d, "単"'] & H^0(S^n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "単"'] & H^0(*) \arrow[d, "="] \\
H^0(K,*) \arrow[r, "単"] \arrow[d, "全"'] & H^0(K) \arrow[r, "全"] \arrow[d, "全"'] & H^0(*) \arrow[d, "全"'] \\
H^0(K,*) \arrow[r] & \mathrm{Coker} i^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

は可換図であり、下の縦列はすべて projection なので全射である。これより、

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & H^0(S^n) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(K,*) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(K) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(K,*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker} i^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

が可換となり、最下部の横列以外は完全である。これより、最下部の横列も完全である。これより、

$$\mathrm{Coker} i^* \cong H^0(K,*) = \widetilde{H}^0(K)$$

よって、$\widetilde{H}^0(K) \cong H_{n-1}(S^n - K)$

□