Definition 0.0.1

X が絶対近傍 retract(ANR) であるとは、任意の正規空間 Y とその閉集合 B、連続写像、$f : B \longrightarrow X$ に対し、${}^{\exists}U : B$ の近傍，$g : U \longrightarrow X \quad \text{s.t} \quad g_{|_B} = f$ である。

つまり、任意の f をある近傍に拡張可能であるということである。この ANR について、しばらく考察していこう。

Lemma 0.0.2

X が ANR であり、$X \cong W$ ならば、W も ANR である。

proof) $\quad h : X \xrightarrow{\cong} W$ とし、

$$(Y, B) \text{ を正規空間とその閉部分集合の対、} f : B \longrightarrow W$$

とする。このとき、$h^{-1} \circ f = B \longrightarrow X$ であり、$X :$ ANR より、

$$^{\exists}U : B \text{ の近傍}, \ g : U \longrightarrow X \quad s.t \quad g_{|_B} = h^{-1} \circ f$$

ここで、$h \circ g : U \longrightarrow W$ は、$h \circ g_{|_B} = f$ である。

□

Lemma 0.0.3

X が ANR であり、$V \subset X :$ open ならば、V も ANR である。

proof) $\quad j : V \longrightarrow X$ を inclusion とする。

$$(Y, B) \text{ を正規空間とその閉部分集合の対、} f : B \longrightarrow V$$

とする。$j \circ f : B \longrightarrow X$ であり、$X :$ ANR より、

$$^{\exists}U : B \text{ の近傍}, \ g : U \longrightarrow X \quad s.t \quad g_{|_B} = j \circ f$$

ここで、$B \subset g^{-1}(V) \subset U$ であり、$g^{-1}(V)$ は B の開近傍である。また、

$$h = g_{|_{g^{-1}(V)}} : g^{-1}(V) \longrightarrow V$$

で定義すると、$h_{|_B} = f$ である。

□

Lemma 0.0.4

X が ANR であり、A が X の retract ならば、A も ANR である。

proof) $r : X \longrightarrow A$ を retraction , $i : A \longrightarrow X$ を inclusion とし、

(Y, B) を正規空間とその閉部分集合の対、$f : B \longrightarrow A$

とする。$i \circ f : B \longrightarrow X$ であり、X : ANR より、

$$^{\exists}U : B \text{ の近傍 },\ g : U \longrightarrow X \quad s.t \quad g_{|_B} = i \circ f$$

よって、$r \circ g : U \longrightarrow A$ に対し、$r \circ g_{|_B} = r \circ i \circ f = f$

□

Lemma 0.0.5

X, Y が ANR ならば、$X \times Y$ も ANR である。

proof) $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$, $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ を projection とし、

(Y, B) を正規空間とその閉部分集合の対、$f : B \longrightarrow X \times Y$

とする。このとき、$p_1 \circ f : B \longrightarrow X$, $p_2 \circ f : B \longrightarrow Y$ に対し、X, Y は ANR であるから、

$$^{\exists}U_1, U_2 : B \text{ の近傍 },\ g_1 : U_1 \longrightarrow X\ ,\ g_2 : U_2 \longrightarrow Y \quad s.t \quad g_{1|_B} = p_1 \circ f\ ,\ g_{2|_B} = p_2 \circ f$$

$U_1 \cap U_2$は、B の近傍であり、

$$g : U_1 \cap U_2 \longrightarrow X \times Y$$

を、$g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ で定義すれば、これは連続であり、$b \in B$ に対しては、

$$g(b) = (g_1(b), g_2(b)) = (p_1 \circ f(b), p_2 \circ f(b)) = f(b)$$

□

Lemma 0.0.6

X を位相空間とし、$X_1, X_2 \subset X$ が共に open で ANR であれば、$X_1 \cup X_2$ も ANR

proof)　面倒なので中岡稔さんの本参照。そこに詳しく載っている。

$\square$

次に ANR である空間の例を挙げよう。

Example 0.0.7

I は ANR である。

proof)

$$(Y, B) \text{ を正規空間とその閉部分集合の対、} f : B \longrightarrow I$$

とすると、ティーチェの拡張定理により、f は Y にまで拡張できる。

$\square$

Example 0.0.8

$\mathbf{R}^n$ は ANR である。

proof)　I は ANR であるので、その開集合である $(0, 1)$ も ANR である。$(0, 1) \cong \mathbf{R}$ なので、$\mathbf{R}$ も ANR。その直積である $\mathbf{R}^n$ も ANR である。

$\square$

Example 0.0.9

S^n は ANR である。

proof)　$\mathbf{R}^{n+1}$ は ANR であり、$\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ も開集合であるから ANR である。ここで、S^n は $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ の retaract であるため、S^n は ANR である。

$\square$

Proposition 0.0.10

compact な多様体は ANR である。

proof)　X を compact な n 多様体であるとする。

X は有限個の座標近傍 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ で覆われる。各 $V_i \cong \mathbf{R}^n$ であるため、V_i は ANR である。よって、それらの有限個の和集合である X も ANR である。

$\square$

Lemma 0.0.11

位相空間 X, Y に対し、$A \subset X$, $B \subset Y$ をそれぞれ compact 部分集合とする。$A \times B \subset O$: open in $X \times Y$ とするとき、

$$^{\exists}U : A \text{ の開近傍}\ ,\ ^{\exists}V : B \text{ の開近傍} \qquad s.t \qquad A \times B \subset U \times V \subset O$$

proof) $\qquad (a, b) \in A \times B$ に対し、

$$a \in {}^{\exists}U_b(a)\ ,\ b \in {}^{\exists}U_a(b) : \text{開近傍} \qquad s.t \qquad U_b(a) \times U_a(b) \subset O$$

である。ここで、$B \subset \bigcup_{b \in B} U_a(b)$ であり、B : compact であるので、

$$^{\exists}b_1, b_2, \cdots, b_n \in B \qquad s.t \qquad B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_a(b_i)$$

これより、$U_a(B) = \bigcup_{i=1}^{n} U_a(b_i)$, $U(a) = \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}(a)$ とおく。

$U_a(B)$, $U(a)$ は open であり、$A \subset \bigcup_{a \in A} U(a)$ で、A は compact であるため、

$$^{\exists}a_1, a_2, \cdots, a_m \in A \qquad s.t \qquad A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U(a_i)$$

これより、$U = \bigcup_{i=1}^{m} U(a_i)$, $V = \bigcap_{i=1}^{m} U_{a_i}(B)$ とおくと、

$$A \times B \subset U \times V \subset O$$

$\square$

Theorem 0.0.12

X を compact 多様体で A をその閉集合とする。A の近傍で retract である W が存在するならば、

$$\mathrm{colim} i_A^{U*} : H_X^m(A) \longrightarrow H^m(A)$$

は同型である。ただし、A の近傍 U に対し、$i_A^U : A \longrightarrow U$ は inclusion

proof) $r : W \longrightarrow A$ を retraction とする。

$$r \circ i_A^W = 1_A \text{であり、} i_A^{W*} \circ r^* = 1_{H^*(A)}$$

これより、i_A^{W*} は全射である。よって、

$$\mathrm{colim} i_A^{U*} : H_X^m(A) \longrightarrow H^m(A)$$

は全射であることがわかる。よってこれが単射を示していく。

$A \subset U$ を任意の開近傍とする。Prop 0.0.10 より、X は ANR であるため U は ANR である。X は compact Hausdorff であるため正規空間である。これより、

$$^\exists V : X \text{ の開集合} \qquad s.t \qquad A \subset V \subset \overline{V} \subset U \cap W$$

これより、$\overline{V}$ は閉集合で A の retract である。ここで、$\overline{V} \times I$ の閉部分集合、

$$B = \overline{V} \times \{0\} \cup A \times I \cup \overline{V} \times \{1\}$$

とおく。また、$f : B \longrightarrow U$ を、

$$f(v,0) = v \ , \ f(v,1) = r(v) \ , \ f(a,t) = a \qquad (v \in \overline{V} \ , \ a \in A \ , \ t \in I)$$

で定義するとこれは連続。また、X, I は共に compact Hausdorff であるため、$X \times I$ は compact Hausdorff、つまり正規空間である。その閉集合である $\overline{V} \times I$ も正規空間である。$(\overline{V} \times I, B)$ が正規空間と閉集合のついであるため、ANR の定義により、

$$^\exists C : B \text{ の近傍} \ , \ g : C \longrightarrow U \qquad s.t \qquad g_{|_B} = f$$

Lemma 0.0.11 により、$^\exists D :$ open in X s.t $A \subset D \subset \overline{V}$, $D \times I \subset C$

ここで、$h = g_{|_{D \times I}} : D \times I \longrightarrow U$ は、$h(d,0) = d = i_D^U(d)$, $h(d,1) = r(d) = i_A^U \circ r_{|_D}(d)$ であるため、

$$i_D^U \simeq i_A^U \circ r_{|_D}$$

である。これより、次の図式が可換となる。

$$\begin{tikzcd}
H^m(U) \arrow[rr, "i_A^{U*}"] \arrow[dr, "i_D^{U*}"'] & & H^m(A) \arrow[dl, "{r_{|_D}}^*"] \\
& H^m(D) &
\end{tikzcd}$$

ようやくここで、

$$\mathrm{colim} i_A^{U*} : H_X^m(A) \longrightarrow H^m(A)$$

で、$[x] \in H_X^m(A)$ に対し、$\mathrm{colim} i_A^{U*}([x]) = 0$ と仮定する。

$$^{\exists}E : A \text{の近傍} \qquad s.t \qquad x \in H^m(E)$$

であり、E は open とは限らないが、$A \subset \overset{\circ}{E}$ であるため、$\overset{\circ}{E} = U$ とおけば、

$$\begin{tikzcd}
H^m(E) \arrow[r, "i_U^{E*}"] \arrow[d] & H^m(U) \arrow[dl] \arrow[d, "i_A^{U*}"] \\
H_X^m(A) \arrow[r, "\mathrm{colim} i_A^{U*}"'] & H^m(A)
\end{tikzcd}$$

が可換となり、先ほどの話とも総合すると A の開近傍 D が存在して、次の図式が可換となる。

$$\begin{tikzcd}
H^m(E) \arrow[r, "i_U^{E*}"] \arrow[d] & H^m(U) \arrow[r, "i_D^{U*}"] \arrow[d] \arrow[dr, "i_A^{U*}"] & H^m(D) \\
H_X^m(A) \arrow[r, "="'] & H_X^m(A) \arrow[r, "\mathrm{colim} i_A^{U*}"'] & H^m(A) \arrow[u, "r_{|_V}{}^*"']
\end{tikzcd}$$

これより、$i_D^{E*}(x) = 0$ in $H^m(D)$ なので、$[x] = 0$ in $H_X^m(A)$

$\square$