Definition 0.0.1

Hausdorff 空間 X と、その閉集合 A に対し、

1. $X - A$ の各点 x は $\mathbf{R}^n$ に同相な開近傍 V を持つ。
2. $x \in A$ に対し、x の開近傍 V で、

$$(V, V \cap A) \cong (\mathbf{R}^{n-1} \times [0, \infty), \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\})$$

   を満たすものが存在する。

このとき、A を X の境界と呼び、$A = \partial X$ と表す。$\partial X \neq \phi$ のとき、X は境界をもつ n 多様体と呼ぶ。

先の多様体の定義は上の定義で $\partial X = \phi$ の場合、つまり、境界のない多様体であった。

Remmark 0.0.2

X が境界をもつ n 多様体のとき、$X - \partial X$ は境界を持たない n 多様体である。

Proposition 0.0.3

X が境界をもつ n 多様体のとき、∂X は境界を持たない $(n-1)$ 多様体である。

proof)　　$x \in \partial X$ に対し、${}^{\exists}V : x$ の開近傍 で、

$$(V, V \cap \partial X) \cong (\mathbf{R}^{n-1} \times [0, \infty), \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\})$$

が存在するため、$U = V \cap \partial X$ とおけば、U は x の ∂X における開近傍で、$U \cong \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\} \cong \mathbf{R}^{n-1}$ であり、任意の $x \in \partial X$ に対し、U が存在するため、∂X は境界のない $(n-1)$ 多様体であることがわかる。

□

トポロジーなどを勉強しているとバウンダリー記号 ∂ が二回重なった時点で問答無用で 0 にしたくなってしまいます。以下で、境界のない多様体で証明された事実を境界もつ多様体に拡張します。

Proposition 0.0.4

X が境界をもつ n 多様体のとき、$x \in X - \partial X$ に対し、

$$H_m(X, X - x) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

proof)　K を X の閉集合で $K \subset X - \partial X$ に対し、切除定理

$$H_*(X, X - K) \cong H_*(X - \partial X, X - \partial X - K)$$

が成立するため、$x \in X - \partial X$ に対し、

$$H_*(X, X - x) \cong H_*(X - \partial X, X - \partial X - x)$$

ここで、$X - \partial X$ は境界のない n 多様体であるから、成立する。

$\square$

Proposition 0.0.5

X が境界をもつ n 多様体のとき、$x \in X - \partial X$ に対し、x の compact 近傍 K で、$^\forall y \in K$ に対し、

$$j^y_{K*} : H_*(X, X - K) \xrightarrow{\cong} H_*(X, X - y)$$

を満たすものが存在する。

Theorem 0.0.6　（消滅定理）

X が境界をもつ n 多様体のとき、K : closed で、$K \subset X - \partial X$ のとき、

$$H_m(X, X - K) = 0 \qquad (m > n)$$

であり、$a \in H_n(X, X - K)$ に対し、$^\forall x \in K$ に対し、$j^x_{K*}(a) = 0$ ならば、$a = 0$

Definition 0.0.7

X : 境界をもつ n 多様体に対し、X が向き付け可能とは、$X - \partial X$ が向き付け可能の時を言う。このとき、$X - \partial X$ の向き、$\{w_x\}_{x \in X - \partial X}$ を X の向きと呼ぶ。

Theorem 0.0.8

X は境界を持つ向き付けられた n 多様体で、$\{w_x\}_{x \in X - \partial X}$ をその向きとする。K を X の compact 集合で $K \subset X - \partial X$ とすると、$w_K \in H_n(X, X - K)$ で、$^\forall x \in K$ に対し、$j^x_{K*}(w_K) = w_x$を満たすものが一意に存在する。

Definition 0.0.9

位相空間対 (X, A) に対し、W : A の開近傍が、X における A のえりであるとは、

$$^{\exists}h : A \times [0, \infty) \xrightarrow{\cong} W \qquad s.t \qquad h(a, 0) = 0$$

の時のことを言う。

Lemma 0.0.10

位相空間対 (X, A) に対し、W が X における A のえりであるとき、A は W の変位レトラクトである。

proof)　　$h : A \times [0, \infty) \xrightarrow{\cong} W$ とし、

$$r : W \longrightarrow A$$

を、$p : A \times [0, \infty) \longrightarrow A$ を projection とし、$r = p \circ h^{-1}$ で定義する。$i : A \longrightarrow W$, $i_0 : A \longrightarrow A \times [0, \infty)$ を inclusion とすると、

$$r \circ i(a) = r \circ h \circ i_0(a) = p(a, 0) = a$$

であり、inclusion と projection により、$A \times [0, \infty) \simeq A$ であるため、$i_0 \circ p \overset{H}{\simeq} 1_{A \times [0, \infty)}$ とおくと、

$$G : W \times I \longrightarrow W$$

を、$G = h \circ H \circ (h^{-1} \times 1_I)$ で定義すると、

$$G(x, 0) = h \circ H(h^{-1}(x), 0) = h \circ i \circ p \circ h^{-1}(x) = h \circ i_0 \circ r(x) = i \circ r(x)$$

であり、また、

$$G(x, 1) = h \circ H(h^{-1}(x), 1) = h \circ h^{-1}(x) = x$$

□

Theorem 0.0.11

X が境界を持つ paracompact な多様体であるとき、∂X の X におけるえりが存在する。また、さらに ∂X が compact であるならば、∂X の任意の開近傍 U に対し、U に含まれるえりが存在する。

proof)　　証明は省略。

Theorem 0.0.12

X は境界を持ち 向き付けられた compact な n 多様体とする。このとき、$\{w_x\}_{x\in X-\partial X}$ をその向きとすると、$^\forall x \in X-\partial X$ に対し、$w \in H_n(X,\partial X)$ で次を満たすものが一意に存在する。

$$j^x_{X-\partial X\,*} : H_n(X,\partial X) \longrightarrow H_n(X, X-x)$$

を考えたとき、$j^x_{X-\partial X\,*}(w) = w_x$

proof)　　Theorem 0.0.11 より、W を ∂X のえりとする。Lemma 0.0.10 により、

$$j^{X-W}_{X-\partial X} : H_n(X,\partial X) \xrightarrow{\cong} H_n(X,W)$$

であり、$X-W$ は閉集合で、X が compact により、これも compact。$X-W \subset X-\partial X$ を満たすので、Theorem 0.0.8 により、

$$^{\exists_1} w_{X-W} \in H_n(X,W) \qquad s.t \qquad ^\forall x \in X-W \text{ に対し、} j^x_{X-W\,*}(w_{X-W}) = w_x$$

これより、$w = j^{X-W}_{X-\partial X}{}^{-1}(w_{X-W})$ で定義する。よって、$x \in X-W$ に関して題意は成り立つ。さらにこれを拡張して、$x \in X-\partial X$ に関して題意が成り立つことを示す。$x \in X-\partial X$ を取ると、$\partial X \subset W-\{x\}$ であり、$W-\{x\}$: open、∂X が compact なので、Theorem 0.0.11 により、

∂X の X におけるえりで、$\partial X \subset W_x \subset W-\{x\}$ をみたす W_x が存在する。よって、

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,\partial X) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] \arrow[dr, "\cong"] & H_n(X,W) \\
H_n(X,X-x) & H_n(X,W_x) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

の可換図式において、$X-W_x$ も compact であるため、

$$^{\exists_1} w_{X-W_x} \in H_n(X,W_x) \qquad s.t \qquad ^\forall y \in X-W_x \text{ に対し、} j^y_{X-W_x\,*}(w_{X-W_x}) = w_y$$

これより、$j^{X-W_x}_{X-W\,*}(w_{X-W_x}) = w_{X-W}$ であることがわかる。また、

$$j^x_{X-W\,*}(w_{X-W}) = w_x \ , \ j^{X-W}_{X-\partial X}(w) = w_{X-W}$$

であった。これより、$j^x_{X-\partial X\,*}(w) = w_x$

$\square$

Definition 0.0.13

X は境界を持ち 向き付けられた compact な n 多様体 とする。このとき、$\{w_x\}_{x\in X-\partial X}$ をその向きとすると、$^\forall x \in X - \partial X$ に対し、$w \in H_n(X, \partial X)$ で、

$$j^x_{X-\partial X *} : H_n(X, \partial X) \longrightarrow H_n(X, X - x)$$

を考えたとき、$j^x_{X-\partial X *}(w) = w_x$ を満たすものが Theorem 0.0.12 により一意に存在する。このとき、w を X の基本ホモロジー類とよぶ。

Remmark 0.0.14

X をcompact で連結な n 多様体とすると、$H_n(X, \partial X) = 0$ or $\mathbf{Z}$ であり、

$$H_n(X, \partial X) \cong \mathbf{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ は向き付け可能}$$

$$H_n(X, \partial X) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ は向き付け不可能}$$

Lemma 0.0.15

$p : S^n \longrightarrow \mathbf{R}P^n$: projection において、

$$p_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(\mathbf{R}P^n)$$

は、n が奇数の時、0 であり、n が偶数の時は、

$$\eta : H_n(S^n) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbf{R}P^n)$$

が存在して、$p_* = 2\eta$

proof) n が奇数の時は、$H_n(\mathbf{R}P^n) = 0$ なので、成り立つ。また、n が偶数の時は、

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & H_n(S^n) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "p_*"'] & H_n(S^n, S^{n-1}) \arrow[d, "p_*"] \\
H_{n+1}(\mathbf{R}P^{n+1}, \mathbf{R}P^n) \arrow[r, "\partial_*"'] & H_n(\mathbf{R}P^n) \arrow[r, "j_*"'] & H_n(\mathbf{R}P^n, \mathbf{R}P^{n-1})
\end{tikzcd}$$

の可換図式において、φ は胞体写像なので、φ_* は同型である。また、左上の ∂_*、右下の j_* は同型である。ここで、思い出すと、

$$^\exists f : H_{n+1}(\mathbf{R}P^{n+1}, \mathbf{R}P^n) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbf{R}P^n, \mathbf{R}P^{n-1})$$

s.t　　$2f = j_* \circ \partial_*$ であった。これより、

$$\eta : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(\mathbf{R}P^n)$$

を、$\eta = j_*^{-1} \circ f \circ \varphi_* \circ \partial_*^{-1}$ とおくと、これは同型で、

$$2\eta = j_*^{-1} \circ j_* \circ \partial_* \circ \varphi_* \circ \partial_*^{-1} = p_*$$

□

Proposition 0.0.16

M をメービウスの帯とすると、M は compact で連結な境界を持つ 2 多様体であるが、向き付け不可能である。

proof)　　前半の主張は良いと思う。問題は向きがつけられるかであるが、そのためには $H_2(M, \partial M)$ を求めればよい。ここで、$\partial M \cong S^1$，$M \simeq S^1$ であるため、$(M, \partial M)$ のホモロジー完全列を考えると、

$$H_2(M) \longrightarrow H_2(M, \partial M) \xrightarrow{\partial_*} H_1(\partial M) \xrightarrow{i_*} H_1(M)$$

に対して、$H_2(M) = 0$ であるため、∂_* は単射。$M \simeq S^1$ は M の幅をつぶす変形であり、それを $\partial M \cong S^1$ で考えれば、これは、

$$p : S^1 \longrightarrow \mathbf{R}P^1$$

に他ならない。また、$S^1 \cong \mathbf{R}P^n$ であり、これより、

$$\begin{tikzcd} H_1(\partial M) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "p_*"'] & H_1(M) \arrow[d, "\cong"] \\ H_1(\mathbf{R}P^1) \arrow[r, "\cong"'] & H_1(S^1) \end{tikzcd}$$

ここで、Lemma　0.0.15 により、p_* は単射であるため、i_* も単車である。よって、

$$H_2(M, \partial M) \cong \mathrm{Im}\partial_* = \mathrm{Ker} i_* = 0$$

よって、M は向きがつけられない。

□

Theorem 0.0.17

X は compact で境界を持ち、向き付けられた n 多様体 とする。$(X, \partial X)$ の homology 完全列での連結準同型

$$\partial_* : H_n(X, \partial X) \longrightarrow H_{n-1}(\partial X)$$

に対し、$w \in H_n(X, \partial X)$ を X の基本ホモロジー類とすると、$\partial_*(w) \in H_{n-1}(\partial X)$ は ∂X の基本ホモロジー類である。

proof) $\partial X \subset W \subset X$ をえりとし、

$$h : \partial X \times [0, \infty) \xrightarrow{\cong} W$$

$h(x, 0) = x$ とする。このとき、$K = W^c \cup h(\partial X \times [1, \infty))$ とすると、K は閉集合である。ここで、

$$h_* : H_n(\partial X \times (I, \partial I)) \longrightarrow H_n(X, \partial X \cup K)$$

を考えるわけだが、$\partial X \cap K = \phi$ であり、$h(\partial X \times [0, 1/3))$ は ∂X の、$W^c \cup h(\partial X \times (2/3, \infty))$ は K のそれぞれ強変異 retract で open であるため、

$$H_n(X, \partial X \cup K) \cong H_n(X, W^c \cup h(\partial X \times ([0, 1/3) \cup (2/3, \infty)))$$

切除定理を用いると、

$$H_n(X, W^c \cup h(\partial X \times ([0, 1/3) \cup (2/3, \infty))) \cong H_n(W, h(\partial X \times ([0, 1/3) \cup (2/3, \infty)))$$

h が同相であるため、

$$H_n(W, h(\partial X \times ([0, 1/3) \cup (2/3, \infty))) \cong H_n(\partial X \times [0, \infty), \partial X \times ([0, 1/3) \cup (2/3, \infty)))$$

あとは、ホモトピー定理を用いて、

$$H_n(\partial X \times [0, \infty), \partial X \times ([0, 1/3) \cup (2/3, \infty))) \cong H_n(\partial \times I, \partial X \times \partial I)$$

ここで、用いた写像はすべて、inclusion と h であり、これより、

$$h_* : H_n(\partial X \times (I, \partial I)) \xrightarrow{\cong} H_n(X, \partial X \cup K)$$

次の図式を考える。

$$
\begin{tikzcd}
 & H_n(X,\partial X \cup K) \arrow[dd, "\partial_*"] & \\
H_n(X,\partial X) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dd, "\partial_*"'] & & H_n(\partial X \times (I,\partial I)) \arrow[ul, "h_*"'] \arrow[dd, "\partial_*"] \\
 & H_{n-1}(\partial X \cup K, K) & \\
H_{n-1}(\partial X) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[rr, "i_{0*}"'] & & H_{n-1}(\partial X \times (\partial I, 1)) \arrow[ul, "h_*"']
\end{tikzcd}
$$

$w \in H_n(X,\partial X)$ を基本ホモロジー類とすると、$w' = h_*^{-1} \circ i_*(w) \in H_n(\partial X \times (I,\partial I))$ は、$\partial X \times I$ の基本ホモロジー類である。ところで、I に適当に向きを定め、$H_1(I,\partial I)$ の基本ホモロジー類を e とすると、積多様体の性質から、$w'' \in H_{n-1}(\partial X)$ を、∂X の基本ホモロジー類とすると、

$$w' = w'' \times e$$

である。さらに、$\partial_* : H_1(I \partial I) \cong H_0(\partial I, 1)$ による e の像を e_0 とおく。

$$
\begin{tikzcd}
H_{n-1}(\partial X) \otimes H_1(I,\partial I) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "1 \otimes \partial_*"'] & H_n(\partial \times (I,\partial I)) \arrow[d, "\partial_*"] \\
H_{n-1}(\partial X) \otimes H_0(\partial I, 1) \arrow[r, "\times"'] & H_{n-1}(\partial X \times (\partial I, 1))
\end{tikzcd}
$$

が可換であるため、

$$\partial_*(w') = \partial_*(w'' \times e) = w'' \times e_0$$

であり、また、

$$
\begin{tikzcd}
H_{n-1}(\partial X) \otimes H_0(\{0\}) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "1 \otimes i_{0*}"'] & H_{n-1}(\partial X) \arrow[d, "i_{0*}"] \\
H_{n-1}(\partial X) \otimes H_0(\partial I, 1) \arrow[r, "\times"'] & H_{n-1}(\partial X \times (\partial I, 1))
\end{tikzcd}
$$

が可換であり、上の横列は、$e_0' \in H_0(\{0\})$ を生成元とすれば、$x \in H_{n-1}(\partial X)$ に対し、$x \times e_0' = x$ と見なしている。これより、

$$i_{0*} \circ \partial_*(w) = \partial_*(w) \times e_0$$

最初の可換図により、

$$w'' \times e_0 = \partial_*(w') = i_{0*} \circ \partial_*(w) = \partial_*(w) \times e_0$$

$\times$ は同型であるため、$\partial_*(w) = w''$

□

多様体で重要な定理は双対定理であるが、境界を持つ場合もほぼ同じ。

Theorem 0.0.18 （双対定理）

X を向き付けられた n 多様体とし、$X - \partial X$ に含まれる compact 部分集合 K に対し、

$$D^K : H_X^m(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

が同型である。

次はポワンカレ双対定理の境界を持つ多様体の場合である。$\partial X = \phi$ のときは、ポワンカレ双対定理と一致することに注意したい。

Theorem 0.0.19 *Lefschetz* 双対定理

X を compact で向き付けられた n 多様体 とする。このとき、$w \in H_n(X, \partial X)$ を X の基本ホモロジー類とすると、

$$\cap w : H^m(X, \partial X) \longrightarrow H_{n-m}(X)$$

$$\cap w : H^m(X) \longrightarrow H_{n-m}(X, \partial X)$$

はともに同型である。

proof)　　X における∂X のえりを W とし、

$$h : \partial X \times [0, \infty) \xrightarrow{\cong} W$$

で、$h(x,0)=x$ とする。また、$K=W^c\cup h(\partial X\times[1,\infty))$ とおくと、K は X の、∂X は $X-K$ の強変位 retract であるため、

$$\begin{tikzcd}
H^m(K) \arrow[d, "="'] & H^m(X) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cap w"] \arrow[d] \arrow[dr, "\cap w_K"] & H_{n-m}(X,X-K) \arrow[d, "\cong"] \\
H^m(K) & H^m_X(K) \arrow[l, "\cong"] \arrow[r, "D^K"'] & H_{n-m}(X,\partial X)
\end{tikzcd}$$

の図式が可換になり、D^K も同型であるため、

$$\cap w: H^m(X)\longrightarrow H_{n-m}(X,\partial X)$$

も同型である。また、$(X,\partial X)$ のコホモロジー、ホモロジー完全列を用いて、

$$\begin{tikzcd}
H^{m-1}(\partial X) \arrow[r] \arrow[d, "\cap\partial_*(w)"'] & H^m(X,\partial X) \arrow[r] \arrow[d, "\cap w"'] & H^m(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cap w"'] & H^m(\partial X) \arrow[d, "\cap\partial_*(w)"'] \\
H_{n-m}(\partial X) \arrow[r] & H_{n-m}(X) \arrow[r] & H_{n-m}(X,\partial X) \arrow[r] & H_{n-m-1}(\partial X)
\end{tikzcd}$$

の可換図を考えると、右側の $\cap w$ は同型であり、Theorem 0.0.17 とポワンカレ双対定理により、、$\cap\partial_*(w)$ も同型なので、Five Lemma により、

$$\cap w: H^m(X,\partial X)\longrightarrow H_{n-m}(X)$$

が同型となる。

□