Definition 0.0.1

位相空間 X に対し、その部分空間 A を考える。

$$\mathcal{U}_A = \{U \subset X \mid U : A \text{ の近傍 }\}$$

とおき、$U, V \in \mathcal{U}_A$ に対し、

$$U \subset V \text{ ならば、} M(U,V) = \{\text{inclusion}\}\ ,\ U \not\subset V \text{ ならば、} M(U,V) = \phi$$

として、小圏とする。

$$H^* : \mathcal{U}_A \longrightarrow Abel$$

に対し、帰納的極限、$\mathrm{colim}(H^*) = H^*_X(A)$ とおく。

Definition 0.0.2

位相空間 X の部分集合からなる空間対 (A,B) に対し、

$$\mathcal{U}_{A,B} = \{(U,V) : X \text{ の部分集合からなる空間対} \mid U : A \text{ の近傍}\ ,\ V : B \text{ の近傍 }\}$$

は小圏となり、$H^* : \mathcal{U}_{A,B} \longrightarrow Abel$ に対し、機能的極限、$\mathrm{colim}(H^*) = H^*_X(A,B)$ とかく。

Definition 0.0.3

X は向きづけられた n 多様体 とし、$\{w_x\}_{x\in X}$ をその向きとする。K : compact in X で、$K \subset X - \partial X$ とその開近傍 U に対し、切除同型

$$k_{U*} : H_n(U, U-K) \xrightarrow{\cong} H_n(X, X-K)$$

を考え、K の基本ホモロジー類 $w_K \in H_n(X, X-K)$ に対し、$w^U_K = {k_{U*}}^{-1}(w_K) \in H_n(U, U-K)$ とおく。

$$\cap w^U_K : H^m(U) \longrightarrow H_{n-m}(U, U-K)$$

を考え、

$$D^K_U : H^m(U) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

を、$D^K_U = k_{U*} \circ \cap w^U_K$ で定義する。

Lemma 0.0.4

(K, L) を多様体 X の compact 部分集合の対とする時、(U, V) を X の部分集合対で、U は K の開近傍、V は L の開近傍とする。$i_V^U : V \longrightarrow U$ を inclusion をとすると、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
H^m(U) \arrow[rr, "i_V^{U*}"] \arrow[d, "D_U^K"'] & & H^m(V) \arrow[d, "D_V^L"] \\
H_{n-m}(X, X-K) \arrow[rr, "j^L_{K*}"'] & & H_{n-m}(X, X-L)
\end{tikzcd}$$

proof)　　$k_V^U : (V, V-L) \longrightarrow (U, U-L)$ を inclusion とし、

$$\begin{tikzcd}
 & (U, U-K) \arrow[r, "k_U"] \arrow[d, "j_K^L"'] & (X, X-K) \arrow[d, "j_K^L"] \\
(L, L-V) \arrow[r, "k_V^U"'] & (U, U-L) \arrow[r, "k_U"'] & (X, X-L)
\end{tikzcd}$$

が可換になり、$k^U_{V*}(w_L^V)) = j^L_{K*}(w_K^U)) \in H_n(U, U-L)$ であるため、$\alpha \in H^m(U)$ に対し、

$$\begin{aligned}
D_L^V \circ i_V^{U*}(\alpha) &= k_{V*}(i_V^{U*}(\alpha) \cap w_L^V) \\
&= k_{U*} \circ k^U_{V*}(i_V^{U*}(\alpha) \cap w_L^V) \\
&= k_{U*}(\alpha \cap k^U_{V*}(w_L^V)) \\
&= k_{U*}(\alpha \cap j^L_{K*}(w_K^U)) \\
&= k_{U*} \circ j^L_{K*}(\alpha \cap w_K^U) \\
&= j^L_{K*} \circ k_{U*}(\alpha \cap w_K^U) = j^L_{K*} \circ D_U^K(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Definition 0.0.5

Lemma　0.0.4 において、$K = L$ のとき、

$$\mathrm{colim}(D_U^K) : H_X^m(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

が誘導される。このとき、$D^K = \mathrm{colim}(D_U^K)$ と書く。

Corollary 0.0.6

(K, L) を多様体 X の compact 部分集合の対とする時、次の図式は可換

$$\begin{tikzcd}
H_X^m(K) \arrow[r, "i_K^L"] \arrow[d, "D^K"'] & H_X^m(L) \arrow[d, "D^L"] \\
H_{n-m}(X, X-K) \arrow[r, "j_{K*}^L"'] & H_{n-m}(X, X-L)
\end{tikzcd}$$

ただし、$i_K^L = \mathrm{colim}(i_U^{V*})$

Lemma 0.0.7

K_1, K_2 を多様体 X の compact 部分集合とし、U_1, U_2 を X におけるそれらの開近傍とするとき、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
H^m(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "D_{U_1\cap U_2}^{K_1\cap K_2}"'] & H^{m+1}(U_1 \cup U_2) \arrow[d, "D_{U_1\cup U_2}^{K_1\cup K_2}"] \\
H_{n-m}(X, X-K_1\cap K_2) \arrow[r, "\partial_*"'] & H_{n-m-1}(X, X-K_1\cup K_2)
\end{tikzcd}$$

ただし、δ^* , ∂_* は Mayer-Vietoris 完全列の連結準同型である。

proof) cup 積と Mayer-Vietoris 完全列との可換性を参照すれば証明できる。

□

Theorem 0.0.8

A, B を X の閉集合とするとき、次の Mayer-Vietoris 完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow H_X^m(A\cup B) \longrightarrow H_X^m(A)\oplus H_X^m(B) \longrightarrow H_X^m(A\cap B) \longrightarrow H_X^{m+1}(A\cup B) \longrightarrow \cdots$$

Corollary 0.0.9

(X_1, A_1) , (X_2, A_2) を位相空間 X の閉集合からなる空間対とするとき、次の Mayer-Vietoris 完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow H^m_X(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \longrightarrow H^m_X(X_1, A_1) \oplus H^m_X(X_2, A_2)$$
$$\longrightarrow H^m_X(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \longrightarrow H^{m+1}_X(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \longrightarrow \cdots$$

Corollary 0.0.10

K_1, K_2 を多様体 X の compact 部分集合とすると、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
H^m_X(K_1 \cap K_2) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "D^{K_1 \cap K_2}"'] & H^{m+1}_X(K_1 \cup K_2) \arrow[d, "D^{K_1 \cup K_2}"] \\
H_{n-m}(X, X - K_1 \cap K_2) \arrow[r, "\partial_*"'] & H_{n-m-1}(X, X - K_1 \cup K_2)
\end{tikzcd}$$

ただし、δ^* , ∂_* は Mayer-Vietoris 完全列の連結準同型である。

Theorem 0.0.11 （双対定理）

X を向き付けられた n 多様体とし、その compact 部分集合 K に対し、

$$D^K : H^m_X(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

が同型である。

この定理の証明もいくつかの段階を踏んでいく。

Lemma 0.0.12

X を向き付けられた n 多様体とし、その compact 部分集合 K_1, K_2 に対し、D^{K_1}, D^{K_2}, および $D^{K_1 \cap K_2}$ について双対定理が成立するとき、$D^{K_1 \cup D^{K_2}}$ においても定理が成立する。

proof) $K_1 \cap K_2 = Z_K$, $K_1 \cup K_2 = W_K$ $(X, X - Z_K) = X_Z$, $(X, X - W_K) = X_W$, $(X, X - K_i) = X_{K_i} (i = 1, 2)$ とおき、$p = n - m$ としておく。

$$\begin{tikzcd}
H^{m-1}_X(Z_K) \arrow[r] \arrow[d, "D^{Z_K}"'] & H^m_X(W_K) \arrow[r] \arrow[d, "D^{W_K}"'] & H^m_X(K_1) \oplus H^m_X(K_2) \arrow[r] \arrow[d, "D^{K_1} \oplus D^{K_2}"'] & H^m_X(Z_K) \arrow[d, "D^{Z_K}"'] \\
H_{p+1}(X_Z) \arrow[r] & H_p(X_W) \arrow[r] & H_p(X_{K_1}) \oplus H_p(X_{K_2}) \arrow[r] & H_p(X_Z)
\end{tikzcd}$$

の図式は可換となる。ここで、上下の横列は Mayer-Vietoris 完全列である。よって Five Lemma から、D^{W_K} が同型となる。

□

Lemma 0.0.13

$X = \mathbf{R}^n$で、凸 compact 集合 K に対し、

$$D^K : H^m_X(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

が同型である。

proof)　　K の任意の開近傍 U に対し、$d(K, U^c) = \varepsilon'$ とし、$\varepsilon = \varepsilon'/2$ とおけば、$V = \{x \in X \mid d(x, K) < \varepsilon\}$ は、K の開近傍であり、V は K と相似であるため、V は凸開集合である。これより、$K \subset V \subset U$ である。ここで、

$$D^K_V : H^m(V) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

を考えると、$m \neq 0$ のときは、$H^m(V) = H_{n-m}(X, X-K) = 0$ なので、これは同型であり、$m = 0$ のとき、

$$D^K_V : H^0(V) \longrightarrow H_n(X, X-K)$$

を考えよう。$H^0(V) \cong H_n(X, X-K) \cong H_n(V, V-K) \cong \mathbf{Z}$ であるから、D^K_V での生成元の行き先を調べればよい。$H^0(V)$ の生成元は単位コサイクル 1 であり、$H_n(X, X-K)$ の生成元は w_K , $H_n(V, V-K)$ の生成元は w^V_Kである。

$$D^K_V(1) = k_{V*}(1 \cap w^V_K) = k_{V*}(w^V_K) = w_K$$

なので、D^K_V は同型であり、

$$D^K : H^m_X(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

も同型となる。

□

Lemma 0.0.14

$X = \mathbf{R}^n$で、その部分集合 K が有限個の凸 compact の和集合で表されるとき、

$$D^K : H^m_X(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

が同型である。

proof)　　Lemma 0.0.12 , Lemma 0.0.13 により、帰納法で求められる。

$\square$

Lemma 0.0.15

$X = \mathbf{R}^n$で、その compact 部分集合 K に対し、

$$D^K : H^m_X(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

が同型である。

proof) $\mathcal{U}^c_K = \{C \subset X \mid C$ は凸 compact 集合の和集合で表される K の近傍 $\}$ とおく。$^\forall U \in \mathcal{U}_K$に対し、$K \subset \mathrm{Int}U$ であるため、

$$\varepsilon = d(K, (\mathrm{Int}U)^c)$$

とおき、$x \in X$ に対し、$V_x = U_\varepsilon(x)$ とおくと、$K \subset \bigcup_{x \in K} V_x$ であるため、

$$^\exists x_1, x_2, \cdots x_p \in K \quad s.t \quad K \subset \bigcup_{i=1}^{p} V_{x_i}$$

さらに、$B_i = \overline{V_{x_i}}$ とおけば、$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_i \subset U$ である。$\bigcup_{i=1}^{p} B_i = C$ とすると、各 B_i は凸 compact 集合であるため、$C \in \mathcal{U}^c_K$ で、$C \subset U$ である。ここで、$C \in \mathcal{U}_K$ でもあるため、次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
H^m(U) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & H^m_X(C) \arrow[dl] \arrow[d] \\
H^m_X(K) \arrow[r, "\mathrm{colim}(i)"'] & \mathrm{colim}_{C \in \mathcal{U}^c_K} H^m_X(C)
\end{tikzcd}$$

調べてみると、colim(i) は全単射になるため、

$$\mathrm{colim}(i) : H^m_X(K) \xrightarrow{\cong} \mathrm{colim}_{C \in \mathcal{U}^c_K} H^m_X(C)$$

また、Lemma 0.0.14 により、$^\forall C \in \mathcal{U}^c_K$ に対し、D^C は同型であるため、

$$\mathrm{colim} D^C : \mathrm{colim}_{C \in \mathcal{U}^c_K} H^m_X(C) \xrightarrow{\cong} \mathrm{colim}_{C \in \mathcal{U}^c_K} H_{n-m}(X, X-C)$$

さらに、任意の $X - K$ に含まれる compact 集合 F に対し、

$$^\exists C \in \mathcal{U}^c_K \qquad s.t \qquad F \subset X - C$$

であることは、$\mathbf{R}^n$ が距離空間であることを考えれば示せる。これより、ホモロジーでの帰納的極限を思い出せば、

$$\mathrm{colim}(j^K_{C\,*}) : \mathrm{colim}_{C\in\mathcal{U}^c_K} H_{n-m}(X, X-C) \xrightarrow{\cong} H_{n-m}(X, X-K)$$

以上を踏まえると、

$$\begin{tikzcd}
H^m_X(K) \arrow[r, "D^K"] \arrow[d, "\mathrm{colim}(i)"'] & H_{n-m}(X, X-K) \\
\mathrm{colim}_{C\in\mathcal{U}^c_K} H^m_X(C) \arrow[r, "\mathrm{colim} D^C"'] & \mathrm{colim}_{C\in\mathcal{U}^c_K} H_{n-m}(X, X-C) \arrow[u, "\mathrm{colim}(j^K_{C\,*})"']
\end{tikzcd}$$

が可換となり、

$$D^K : H^m_X(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

が同型である。

□

Lemma 0.0.16

X が向き付けられた n 多様体で、その compact 部分集合 K に対し、K が $\mathbf{R}^n$ と同相な開近傍 V をもつならば、

$$D^K : H^m_X(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

が同型である。

proof)　　$h : V \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^n$ としておく。次の図式、

$$\begin{tikzcd}
H^m_X(h(K)) \arrow[d, "D^{h(K)}"'] & H^m(K) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "="] \arrow[d, "D^K"'] & H^m_X(K) \arrow[d, "D^K"] \\
H_{n-m}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - h(K)) & H_{n-m}(V, V-K) \arrow[l, "\cong"] \arrow[r, "\cong"'] & H_{n-m}(X, X-K)
\end{tikzcd}$$

は可換である。ただし、右下は切除同型である。ここで、$h(K)$ は compact であるため、Lemma　0.0.15 により、左の $D^{h(K)}$ が同型になり、

$$D^K : H^m_X(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

が同型となる。

□

Theorem 0.0.17 （双対定理）

X を向き付けられた n 多様体とし、その compact 部分集合 K に対し、

$$D^K : H_X^m(K) \longrightarrow H_{n-m}(X, X-K)$$

が同型である。

proof) 消滅定理での証明を思い出せば、有限個の compact 集合 $K_1, K_2, \cdots, K_s$ で、各 K_i は $\mathbf{R}^n$ と同相な近傍を持ち、$K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_s$ であるようなものが存在する。これより、Lemma 0.0.16 , Lemma 0.0.12 と s に関する帰納法を用いれば、証明される。

□

Theorem 0.0.18 （*Poincaré* 双対定理）

X を compact で向き付けられた n 多様体 とする。このとき、$w \in H_n(X)$ を X の基本ホモロジー類とすると、

$$\cap w : H^m(X) \longrightarrow H_{n-m}(X)$$

は同型である。

proof) Theorem 0.0.17 において、$K = X$ とおけば成立する。

□