

0.1 Cofibrantly generated model category

Definition 0.1.1

C を category とし、 I を C のある morphism の class とする。このとき、 C の morphism が

1. I -injective とは、 I のすべての morphism に対し RLP を持つことである。
 I -inj と書く。
2. I -projective とは、 I のすべての morphism に対し LLP を持つことである。
 I -proj と書く。
3. I -cofibration とは、すべての I -inj に対し LLP を持つことである。 I -cof と書く。
4. I -fibration とは、すべての I -proj に対し RLP を持つことである。 I -fib と書く。

Example 0.1.2

C : model category としたとき、 $I = \{\text{cofibrations}\}$ ならば、 $I\text{-inj} = \{\text{acyclic fibrations}\}$ であり、 $I\text{-cof} = I$ である。また、 $I = \{\text{fibrations}\}$ ならば、 $I\text{-proj} = \{\text{acyclic cofibrations}\}$ であり、 $I\text{-fib} = I$ である。

Remmark 0.1.3

1. $I \subset I\text{-cof}$, $I \subset I\text{-fib}$
2. $(I\text{-cof})\text{-inj} = I\text{-inj}$, $(I\text{-fib})\text{-proj} = I\text{-proj}$
3. $J \subset I$ ならば、 $I\text{-inj} \subset J\text{-inj}$, $I\text{-proj} \subset J\text{-proj}$ であり、 $J\text{-cof} \subset I\text{-cof}$, $J\text{-fib} \subset I\text{-fib}$

Lemma 0.1.4

$F : C \iff D : G$ において、 I, J をそれぞれ C, D の morphism の class とする。このとき、

1. $U(FI\text{-inj}) \subset I\text{-inj}$
2. $F(I\text{-cof}) \subset FI\text{-cof}$

$$3. \quad F(UJ\text{-proj}) \subset J\text{-proj}$$

$$4. \quad U(J\text{-fib}) \subset UJ\text{-fib}$$

proof) 1 から示してみる。 $f \in U(FI\text{-inj})$ を取ると、 $g \in FI\text{-inj}$ が存在し $U(g) = f$ である。任意の $\alpha : A \longrightarrow B \in I$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & U(X) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow U(g)=f \\ B & \longrightarrow & U(Y) \end{array}$$

の可換図を考えたとき、adjoint より

$$\begin{array}{ccc} FA & \longrightarrow & X \\ F\alpha \downarrow & & \downarrow g \\ FB & \longrightarrow & Y \end{array}$$

の図式が考えられ、 $F\alpha \in FI$ であり、 $g \in FI\text{-inj}$ であるから lift が考えられる。adjoint で戻せば元の図式の lift が考えられるので $f \in I\text{-inj}$ である。

2 は $f \in F(I\text{-cof})$ を取ると、 $g \in I\text{-cof}$ が存在し $F(g) = f$ である。 $\beta : X \longrightarrow Y \in FI\text{-inj}$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} FA & \longrightarrow & X \\ f=Fg \downarrow & & \downarrow \beta \\ FB & \longrightarrow & Y \end{array}$$

の図式を考えると、adjoint から、

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & UX \\ g \downarrow & & \downarrow U\beta \\ B & \longrightarrow & UY \end{array}$$

の図式を考え、 $U\beta \in U(FI\text{-inj}) \subset I\text{-inj}$ であるので、この図式は lift を持ち、元の図式も lift を持つ。3,4 も同様である。

□

Definition 0.1.5

C を cocomplete category とし、 $I \subset \text{Mor}(C)$ を考える。

1. relative I -cell complex とは I の morphism の coproduct、sequential colimit、cobased change で生成される morphism のことを示す。
2. $X \in \text{ob}(C)$ が I -cell complex とは、 $\phi \longrightarrow X$ が relative I -cell complex であるときを言う。

Example 0.1.6

TOP において、 $I = \{S^{n-1} \hookrightarrow D^n\}_{n \geq 0}$ を考えたとき、relative I -cell complex とは、relative cell complex の inclusion を意味し、 I -cell complex というのは CW complex のことである。

Proposition 0.1.7

C を cocomplete category とし、 $I \subset \text{Mor}(C)$ を考える。relative I -cell complex は I -cofibration である。

proof) $f : A \longrightarrow B$: relative I -cell complex とし、

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

の可換図式で、 p を I -injective とする。relative I -cell complex の定義から、

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

で左側は push out diagram で $i \in I$ である。このとき、 p が I -injective であるから、

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

$B' \longrightarrow X$ で大きな diagram を可換にする morphism が存在するが、push out の性質から、 $B \longrightarrow X$ が存在し、右の図式を可換にする。

□

Corollary 0.1.8

C を cocomplete category とし、 $I \subset \text{Mor}(C)$ とする。このとき、relative I -cell complex の retract は I -cofibration である。

proof) retract が lift property を保つことと、Prop 0.1.7 による。

□

Proposition 0.1.9

C を cocomplete category とし、 $I \subset \text{Mor}(C)$ は permits small object argument (I の morphism の domain が sequential small) とする。このとき、 I -cofibration は relative I -cell complex の retract ある。

proof) $f : X \longrightarrow Y$ を I -cofibration とする。small object argument を用いて、 $f : X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{p} Y$ と f は分解でき、 j は relative I -cell complex、 p は I -injective と取ることができる。 p が I -injective なのだから、

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & Z \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{=} & Y \end{array}$$

であり、

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{=} & X & \xrightarrow{=} & X \\ f \downarrow & & j \downarrow & & f \downarrow \\ Y & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

で下列の合成は恒等射なのだから、 f は j の retract である。

□

Corollary 0.1.10

C を cocomplete category とし、 $I \subset \text{Mor}(C)$ は permits small object argument (I の morphism の domain が sequential small) とする。このとき、 I -cofibration の集合と relative I -cell complex の retract の集合は一致する。

proof) Cor 0.1.8、Prop 0.1.9 による。

□

Definition 0.1.11

C を category とする。 $\text{Mor}(C)$ の部分集合 $\mathcal{M}$ に対し、 $A \in \text{ob}(C)$ が $\mathcal{M}$ に対し small であるとは、

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \cdots$$

で $f_j \in \mathcal{M}$ である任意の sequence に対し、natural morphism

$$\text{colim}_n \text{Hom}(A, X_n) \longrightarrow \text{Hom}(A, \text{colim}_n X_n)$$

が同型である時のことを言う。このとき A は $\mathcal{M}$ -small であるという。特に $\text{Mor}(C)$ -small のことを sequential small という。

Example 0.1.12

Set において有限集合は sequential small である。

Example 0.1.13

位相圏において $\mathcal{M} = \{\text{inclusion between relative cell complex}\}$ と置けば、compact space は $\mathcal{M}$ -small である。

Corollary 0.1.14

R -module において、 A が有限生成の自由加群ならば、 A は sequentially small である。

DGM において、 M が有限個の M_k 以外は 0 で、各 M_k が有限生成の自由加群ならば、 M は sequentially small である。

Definition 0.1.15

model 圏 C が cofibrantly generated とは、2つの $\text{Mor}(C)$ の部分集合 I, J が与えられ次の条件を満たす。

1. I の任意の morphism の定義域 (source) は $\text{Co}\mathcal{F}\text{-small}$ である。
2. p が acyclic fibration であることと p が I の任意の morphism に対し RLP を持つことは同値である。
3. J の任意の morphism の定義域 (source) は $\mathcal{W} \cap \text{Co}\mathcal{F}\text{-small}$ である。
4. p が fibration であることと p が J の任意の morphism に対し RLP を持つことは同値である。

Example 0.1.16

DGM において、 $I = \{S^{n-1} \hookrightarrow D^n | n \geq 0\}$, $J = \{0 \longrightarrow D^n | n \geq 0\}$ とおけば、これにより DGM は cofibrantly generated な model category となる。

Example 0.1.17

TOP において、 $I = \{S^{n-1} \hookrightarrow D^n | n \geq 0\}$, $J = \{D^n \times \{0\} \hookrightarrow D^n \times I | n \geq 0\}$ とおけば、これにより TOP は cofibrantly generated な model category となる。

Example 0.1.18

sSet において、 $I = \{\partial \Delta^n \hookrightarrow \Delta^n | n \geq 0\}$, $J = \{\Delta_k^n \hookrightarrow \Delta^n | 0 \leq k \leq n, n \geq 0\}$ とおけば、これにより sSet は cofibrantly generated な model category となる。

このとき、 I を generating cofibration、 J を generating acyclic cofibration とよぶ。

Example 0.1.19

DGM において、 $I = \{S^{n-1} \hookrightarrow D^n | n \geq 0\}$, $J = \{0 \longrightarrow D^n | n \geq 0\}$ とおけば、これにより DGM は cofibrantly generated な model category となる。

Proposition 0.1.20

M を cofibrantly generated model category とする。このとき、 I, J をそれぞれ generating cofibration、acyclic cofibration とする。

1. M の cofibration の集合と、relative I -cell complex の retract の集合は一致する。つまり、 I -cofibration の集合と一致する。
2. M の acyclic fibration の集合と I -injective の集合は一致する。

3. M の acyclic cofibration の集合と、relative J -cell complex の retract の集合は一致する。つまり、 J -cofibration の集合と一致する。
4. M の fibration の集合と J -injective の集合は一致する。

proof) とりあえず、1 だけ示す。cofibrantly generated の定義から、 $\{I\text{-injectives}\} = \{\text{acyclic fibration}\}$ ということに注意すれば、Cor 0.1.10 より、

$$\begin{aligned}
 & \{\text{Cofibrations}\} \\
 &= \{\text{任意の Acyclic fibration に対し RLP を持つ morphism}\} \\
 &= \{\text{任意の } I\text{-injective に対し RLP を持つ morphism}\} \\
 &= \{I\text{-cofibration}\} \\
 &= \{\text{retract of relative } I\text{-cell complex}\}
 \end{aligned}$$

Corollary 0.1.21

M を cofibrantly generated model category としたとき、cofibrant object は I -cell complex の retract である。

実際にある category が model category であることを示す際には、generating をうまく見つけて、cofibrantly generating model category であることを示すのがほとんどである。その際に便利なのが次の定理である。

Theorem 0.1.22

C を bicomplete な category とし、 W を morphism の集合で two-out-of-three を満たし、retract で閉じているとする。このとき、 I, J が morphism の集合で次を満たすとする。

1. I, J は permit small object argument
2. J -cofibration は I -cofibration かつ W の元
3. I -injective は J -injective かつ W の元
4. 次のどちらかの条件を満たす。
 - (a) I -cofibration かつ W の元ならば、 J -cofibration

(b) J -injective かつ W の元ならば、 I -injective

このとき、 C は W を weak equivalence とし、 I, J を generation cofibration、acyclic cofibration とした cofibrantly generated model structure が存在する。

proof) cofibration を I -cofibration、fibration を J -injective により定義する。MC1 と MC2 は仮定から成り立つ。MC3 の retract に関しては、 W は仮定から、cofibration と fibration に関しては retract が lift property を保つことから示される。次に MC5 は I は small object argument を用いれば構成できる。そして、残る MC4 を示せばよい。まず、4a を仮定した場合、これは acyclic cofibration ならば、 J -cofibration と言っていて、仮定 2 をあわせるとその逆も成り立つ。つまり、

acyclic cofibration = J -cofibration = J -injective に対し RLP を持つ = fibration に対し RLP を持つ

ということで MC4 の半分は満たす。残りはどうするかというと、

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

の可換図式で、 i が cofibration、 p を acyclic fibration とする。 $p: X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y$ と分解し、 j を I -cofibration、 q を I -injective と取る。このとき、仮定 3 と two-out-of-three から $j \in W$ であることが分かる。また、仮定 4 から j は J -cofibration である。 p は J -injective でもあるので、

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{=} & X \\ j \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

の図式は、 $h: Z \rightarrow X$ が存在し、図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j} & Z & \xrightarrow{h} & X \\ p \downarrow & & q \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{=} & Y & \xrightarrow{=} & Y \end{array}$$

の可換図式を考えれば、 p は q の retract であることが分かる。これより、 p は I -injective である。ということは、もとの図式で

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

p が I -injective、 i が cofibration= I -cofibration なのだから、斜め向きの morphism が存在し図式を可換にする。

4b を仮定しても同様の証明ができる。

□

すでに分かっている cofibrantly generated model category と比較し、model structure を入れるということも良く行われる手法である。具体的には cofibrantly generated model category との adjoint functor があった際に、generating を functor で移して考えたりする。

Theorem 0.1.23 *Transfar principal*

M を cofibrantly generated model category とし、 I, J をその generating cofibration、acyclic cofibration とする。 N を bicomplete な category とし、

$$F : M \rightleftarrows N : U$$

を adjoint functors し、 $FI = \{Fi \in \text{Mor}(N) \mid i \in I\}$, $FJ = \{Fj \in \text{Mor}(N) \mid j \in J\}$ とおく。このとき、次の2つを仮定する。

1. FI and FJ permits small object argument.
2. U は relative FJ -cell complex を M の weak equivalence に移す。

このとき、 N は $W = \{f \in \text{Mor}(N) \mid U(f) \text{ is weak equivalence in } M\}$ を weak equivalence とし、 FI, FJ を generating cofibration、acyclic cofibration とした cofibrantly generated model structure が存在し、さらに上記の adjoint は Quillen adjoint になる。

proof) N が FI, FJ に対し、Theorem 4 の状況を満たしていることを確かめる。まず、functor は composition と retract を保つので W は two-out-of-three を満たし retract で閉じている。

1. 仮定より FI, FJ は permits small object argument.
2. FJ -cofibration を考えると、Cor 0.1.10 により、これは relative FJ -cell complex の retract なので、仮定より FJ -cell complex は weak equivalence であるため、 FJ -cofibration は weak equivalence である。また、 M は model category であるから、

$$\{\text{acyclic fibrations}\} \subset \{\text{fibrations}\}$$

でつまり、

$$\{I\text{-injectives}\} \subset \{J\text{-injectives}\}$$

であり、Lemma 0.1.4 を用いると、

$$\{FI\text{-injectives}\} \subset \{FJ\text{-injectives}\}$$

であることが分かる。これより、

$$\{FJ\text{-cofibrations}\} \subset \{FI\text{-cofibrations}\}$$

であることは定義を考えればすぐに分かる。よって、 FJ -cofibration ならば、 FI -cofibration である。

3. FI -injective を考えると、 FJ -injective であるのは上で示した。Lemma 0.1.4 より、 $U(FI\text{-inj}) \subset I\text{-inj} = \{\text{Acyclic fibrations in } M\}$ であったから、 FI -injective は U で移すと weak equivalence なので、 FI -injective は W の元である。
4. 4b を示す。 $f : X \rightarrow Y$ を FJ -injective かつ W の元とする。よって、 $U(f)$ は weak equivalence かつ J -injective in M である。つまり、 $U(f)$ は acyclic fibration in M で、 I -injective である。

$$\begin{array}{ccc} FA & \longrightarrow & X \\ F(i) \downarrow & & \downarrow f \\ FB & \longrightarrow & Y \end{array}$$

の可換図を考えたとき、 $Fi \in FI$ とする。adjoint なので、

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & UX \\ i \downarrow & & \downarrow U(f) \\ B & \longrightarrow & UY \end{array}$$

の図式は $U(f)$ が I -injective なので、 $B \rightarrow UX$ が存在し、図式を可換にする。
この adjunction の $FB \rightarrow X$ が元の図式を可換にする morphism である。よって、 f は FI -injective

最後に (F, U) が Quillen adjoint であることを示す。そのためには、 F が cofibration と acyclic cofibration を保つことを示せばよい。 F は left adjoint なのだから、colimit を保つ。よって、colimit によって構成させる relative I -cell complex は relative FI -complex へ、relative J -cell complex は relative FJ -cell complex にそれぞれ移す。また、functor は retract を保つので、relative I -cell complex の retract=cofibration in M は relative FI -cell complex の retract=cofibration in N へ移す。acyclic cofibration についても同様である。

□

Remmark 0.1.24

上記の N の model structure における fibration は U で移して M の fibration と条件と同値である。 N の fibration= FJ -injective であることを思い返せば簡単に示せる。

しかしながら現実問題、Transfar principal の 2 の条件を示すことは容易ではない。そこで、かなり条件を絞ることでより実用的な定理を導ける。

Theorem 0.1.25

M を cofibrantly generated model category とし、 I, J をその generating cofibration、acyclic cofibration とする。 N を bicomplete な category とし、

$$F : M \rightleftarrows N : U$$

を adjoint functors し、 $FI = \{Fi \in \text{Mor}(N) \mid i \in I\}$ 、 $FJ = \{Fj \in \text{Mor}(N) \mid j \in J\}$ とおく。このとき、 $W = \{f \in \text{Mor}(N) \mid U(f) \text{ is weak equivalence in } M\}$ $Fib = FJ$ -injectives = $\{f \in \text{Mor}(N) \mid U(f) \text{ is fibration in } M\}$ 、 $Cof = FI$ -cofibrations で定義し、次の 2 つを仮定する。

1. FI and FJ permits small object argument.
2. N の object は all fibrant、つまり、 $X \rightarrow *$ は fibration in N であり、任意の object である X に対し、 $\Delta : X \rightarrow X \times X$ の functorial factorization で、 $\Delta : X \xrightarrow{\sim} \text{Path}(X) \rightarrow X \times X$ となるものが存在する。

このとき、 N は上記の W, Fib, Cof で、 FI 、 FJ を generating cofibration、acyclic cofibration とした cofibrantly generated model category となり、さらに上記の adjoint は Quillen adjoint になる。

proof) 2 の条件が、Theorem 0.1.23 における 2 を満たすかを確認めればよい。 $i : X \rightarrow Y$ を relative FJ -cell complex とする。Cor 0.1.10 により、 i は FJ -cofibration である。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{=} & X \\ i \downarrow & \nearrow r & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & * \end{array}$$

の図式は、 N の object が all fibrant なので $X \rightarrow *$ が fibration である。 N の fibration は FJ -injective なので $r : Y \rightarrow X$ で図式を可換にする morphism が存在する。このとき、 $r \circ i = 1$ である。次に、

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ i \downarrow & & \downarrow \Delta \\ Y & \xrightarrow{(1, i \circ r)} & Y \times Y \end{array}$$

の可換図を考え、 Y の path object で分解すると、

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \longrightarrow & \text{Path}(Y) \\ i \downarrow & & & \nearrow H & \downarrow \text{fib} \\ Y & & & & Y \times Y \\ & & & \searrow (1, i \circ r) & \end{array}$$

先ほどと同様に $H : Y \rightarrow \text{Path}(Y)$ で可換にする morphism が存在する。これより、 $i \circ r \simeq 1$ である。all fibrant なのだから、 $i \circ r \simeq 1$ となる。 U は right adjoint だから、path object を保ち、 $U(i) \circ U(r) \sim 1$, $U(r) \circ U(i) = 1$ in M となる。これは、 $U(i)$ が $\text{Ho}(M)$ で isomorphism ということで、すなわち $U(i)$ は weak equivalence in M である。よって、 $i : \text{weak equivalence in } N$ となり、Theorem 0.1.23 を満たす。

□