0.1 DGM

おそらくモデル圏で一番わかりやすいのは Chain Complex の圏ではなかろうか。わかりやすいとは言っても構成も証明も面倒で仕方ありません。注意として DGM は負次元において 0 とする。

Definition 0.1.1

$f : C \longrightarrow D$ を chain map とするとき、

1. f が weak equivalence とは、$f_* : H_n(C) \longrightarrow H_n(D) \quad (n \geqq 0)$ が同型である。
2. f が cofibration とは、$f : C_n \longrightarrow D_n \quad (n \geqq 0)$ が単射であり、cokerf_n が projective module である。
3. f が fibration とは、$f : C_n \longrightarrow D_n \quad (n \geqq 1)$ が全射である。

この choice によって DGM は model category となるわけですがそれには準備が必要です。

Lemma 0.1.2

$f : C \longrightarrow D$ が cofibration であるとき、$P = \mathrm{coker} f$ とおけば、$D \cong C \oplus P$ である。

proof) P は projective module なので、

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

の短完全列は split する。これにより、$D \cong C \oplus P$ である。

□

Lemma 0.1.3

A, B が R-module で、A が B の retract であり、B が射影的加群なら A も射影的加群となる。

proof) $p : M \longrightarrow N$ を全射、$f : A \longrightarrow N$ を考える。retract の条件から、

$$r : B \longrightarrow A\ ,\ i : A \longrightarrow B$$

で $r \circ i = 1_A$ を満たすものが存在する。B が射影的加群から、$f \circ r : B \longrightarrow N$ に対し、その lift

$$g : B \longrightarrow M$$

が存在する。これより、$g \circ i : A \longrightarrow M$ を考えると、

$$p \circ (g \circ i) = f \circ r \circ i = f$$

であり、A が射影的加群となる。

□

Corollary 0.1.4

A, B を R-module とし、$A \oplus B$ が projective なら、A, B も projective である。

proof)　A, B はともに、$A \oplus B$ の retract であるため。

Definition 0.1.5

A を R-module とする。chain comlex である $K(A, n)$ を、

$$K(A,n)_m = \begin{cases} A & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

で定義する。また、$D(A, n)$ を、

$$D(A,n)_m = \begin{cases} A & m = n, n-1 \\ 0 & m \neq n, n-1 \end{cases}$$

で定義する。ただし、$D(A,n)_n \longrightarrow D(A,n)_{n-1}$ の boundary は恒等射で与えられているとする。

Remmark 0.1.6

$$H_m(K(A,n)) = \begin{cases} A & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$H_*(D(A,n)) = 0$$

Definition 0.1.7

A : chain complex が $H_*(A) = 0$ を満たすとき、A を acyclic と呼ぶ。例えば、$D(A, n)$ は acyclic である。

Lemma 0.1.8

A を R-module、M を chain complex とする。このとき、

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{Ch}(D(A, n), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M_n)$$

を、$\alpha(f) = f_n$ で定義するとこれは全単射である。

proof) $D(A, n)$ は次元 $n, n-1$ 以外は 0 なので、この二つの次元について写像を考えればよい。$g \in \mathrm{Hom}_R(A, M_n)$ とすると、$f_n = g$ で、

$$f_{n-1} : A \longrightarrow M_{n-1}$$

$f_{n-1} = \partial_M \circ g$ とすれば、chain map である $f : D(A, n) \longrightarrow M$ が構成でき、$\alpha(f) = g$ となる。よって全射である。

また、$f, g : D(A, n) \longrightarrow M$ に対し、$\alpha(f) = \alpha(g)$ とすれば、

$$f_n = g_n : A \longrightarrow M_n$$

であり、$D(A, n)$ の boundary を考えれば $f_{n-1} = g_{n-1}$ も成立する。よって、$f = g$ である。よって単射。

□

Remmark 0.1.9

$D(\quad, n) : R\mathrm{-module} \Longleftrightarrow \mathrm{DGM} : (\quad)_n$

Definition 0.1.10

DGM において、A が projective chain complex であるとは、任意の

$$\text{全射 } p : M \longrightarrow N \text{ と、} f : A \longrightarrow N$$

に対し、$\tilde{f} : A \longrightarrow M$ が存在し、$p \circ \tilde{f} = f$ を満たす。

A が projective chain complex になる条件としては、各 A_k が projective module では不十分である。確かに $\tilde{f}_k : A_k \longrightarrow M_k$ で図式を可換にするものは得られるが、chain map かどうかは定かでない。

Lemma 0.1.11

A :projective module ならば、$D(A,n)$ は projective chain complex である。

proof)　とりあえず、全射 $p : M \longrightarrow N$ と、$f : D(A,n) \longrightarrow N$ に対し、

$$\tilde{f}_n : D(A,n)_n = R \longrightarrow M_n$$

で $p_n \circ \tilde{f}_n = f_n$ を満たすものが存在する。よって、Lemma 0.1.8 により $\tilde{f} : D(A,n) \longrightarrow M$ が構成できる。ここで、$\tilde{f}_{n-1} = \partial_M \circ \tilde{f}_n$ で定義されていた。

$$p_{n-1} \circ \tilde{f}_{n-1} = p_{n-1} \circ \partial_M \circ \tilde{f}_n = \partial_N \circ p_n \circ \tilde{f}_n = \partial_N \circ f_n = f_{n-1}$$

なので、

$$\begin{tikzcd} D(A,n) \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & M \arrow[dl, "p"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

が可換となる。

□

Corollary 0.1.12

$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を projective module の族とする。このとき、$\oplus_{\lambda\in\Lambda} D(A_\lambda, n)$ は projective chain complex である。

Proposition 0.1.13

A は acyclic な chain complex とし、各 A_k は projective module とする。このとき、$Z_k(A) = \mathrm{Ker}\partial_k$ は projective module であり、$A \cong \oplus_{k\geqq 1} D_k(Z_k(A))$ となる。

proof)　$B_k(A) = \mathrm{Im}\partial_{k+1}$ とおく。$H_k(A) = Z_k(A)/B_k(A)$ である。ここで、

$$A_n^{(k)} = \begin{cases} A_n & n \geqq k \\ B_{k-1}(A) & n = k-1 \\ 0 & n < k-1 \end{cases}$$

で定義する。すると、

$$A_n^{(k+1)} = \begin{cases} A_n & n \geqq k+1 \\ B_k(A) & n = k \\ 0 & n < k \end{cases}$$

であるため、これにより、

$$A_n^{(k+1)}/A_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & n \geqq k+1 \\ A_k/B_k(A) & n = k \\ B_{k-1}(A) & n = k-1 \\ 0 & n < k \end{cases}$$

A が acyclic であるということは、

$$A_{k+1} \longrightarrow A_k \longrightarrow A_{k-1} \longrightarrow A_{k-2}$$

が exact であるため、準同型定理を用いて、

$$A_k/B_k(A) = A_k/Z_k(A) \cong B_{k-1}(A) = Z_{k-1}(A)$$

となるため、

$$A_n^{k+1}/A_n^k \cong D(Z_{k-1}(A), k)$$

ところで、$Z_0(A) = A_0$ なので、$Z_0(A)$ は projective である。また、A が acyclic より、

$$0 \longrightarrow B_1(A) \longrightarrow A_1 \longrightarrow Z_0(A) \longrightarrow 0$$

は分解する短完全列である。よって、$A_1 \cong B_1(A) \oplus Z_0(A)$ であるが、A_1 が projective であるから、Cor 0.1.4 により、$B_1(A) = Z_1(A)$ は projective である。また、

$$A = A^{(1)} \cong A^{(2)} \oplus D_1(Z_0(A))$$

であることもわかる。というわけ、この構成を繰り返していけば、各 $Z_k(A)$ は projective であり、$A \cong \oplus_{k \geqq 1} D_k(Z_{k-1}(A))$ であることがわかる。

□

Corollary 0.1.14

A を chain complex とする。各 A_k が projective module で、A が acyclic であれば、A は projective chain complex である。

Definition 0.1.15

colimit で閉じている圏 C における sequence

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

に対し、$X_n \longrightarrow \mathrm{colim}_n X_n$ という自然な morphism がある。よって、$A \in C$ に対し、

$$\mathrm{Hom}(A, X_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathrm{colim}_n X_n)$$

がこの自然な morphism の合成によって定義される。さらに、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A, X_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(A, X_1) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\mathrm{Hom}(A, \mathrm{colim}_n X_n) \arrow[r, "="'] & \mathrm{Hom}(A, \mathrm{colim}_n X_n) \arrow[r, "="'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

の図式から、

$$\mathrm{colim}_n \mathrm{Hom}(A, X_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathrm{colim}_n X_n)$$

が誘導されます。A が任意の sequence に対し、この対応が全単射のとき A を sequencially small と呼ぶ。

Lemma 0.1.16

Set において、A が有限集合なら sequencially small である。

proof)　　$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ とする。このとき、

$$\alpha : \mathrm{colim}_n \mathrm{Hom}(A, X_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathrm{colim}_n X_n)$$

が全単射を示す。まず全射から。$f \in \mathrm{Hom}(A, \mathrm{colim}_n X_n)$ をとると、

$$f : A \longrightarrow \mathrm{colim}_n X_n$$

であるが、$\mathrm{colim}_n X_n = \coprod X_n / \sim$ であったのを思い出せば、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & \coprod X_n \arrow[dl, "p"] \\
& \mathrm{colim} X_n &
\end{tikzcd}$$

を可換にする写像 $g : A \longrightarrow \coprod X_n$ が構成できる。このとき、$g(a_i) \in X_{n_i}$ となる $n_i \in Z^+$ が存在するが、$m = \max_{1 \leqq i \leqq n} n_i$ とおくと、$h : A \longrightarrow X_m$ が $h(a_i) = j_i^m \circ g(a_i)$ で定義する。(ただし、$j_i^m : X_{n_i} \longrightarrow X_m$ は sequence における写像の合成) $h \in \mathrm{Hom}(A, X_m)$ でこれより、$[h] \in \mathrm{colim}_n \mathrm{Hom}(A, X_n)$ を考えれば、$\alpha[h] = f$ である。

次に単射であるが、$[f], [g] \in \mathrm{colim}_n \mathrm{Hom}(A, X_n)$ において、$\alpha[f] = \alpha[g]$ とする。$f \in Hom(A, X_r)$, $g \in \mathrm{Hom}(A, X_s)$ と考えられ、$r \leqq s$ と考えてよい。仮定により、$[f(a_i)] = [g(a_i)]$ であるため、$t_i \leqq r$ と、$x \in X_{t_i}$ が存在し、$j_{t_i}^n(x) = f(a_i)$, $j_{t_i}^m(x) = g(a_i)$ を満たす。このとき、$t = \max_{1 \leqq i \leqq n} t_i$ とおくと、自然と $h : A \longrightarrow X_t$ が定義でき、$j_t^r \circ h = f$, $j_t^r \circ h = g$ となるため、$[f] = [g]$ なので単射

□

Corollary 0.1.17

R-module において、A が有限生成の自由加群ならば、A は sequencially small である。

DGM において、M が有限個の M_k 以外は 0 で、各 M_k が有限生成の自由加群ならば、M は sequencially small である。

Corollary 0.1.18

A が有限生成の自由加群とすると、$D(A, n)$, $K(A, n)$ はすべての n に対し、sequencially small である。

Definition 0.1.19

chain complex である $D^n = D(R, n)$, $S^n = K(R, n)$ で定義し、それぞれ n-disk、n-sphere とよぶ。また、chain map

$$j_n : S^{n-1} \longrightarrow D^n$$

を、次元 $n-1$ において、$R \longrightarrow R$ を項等射により定義する。

次は fibration における重要な考察である。

Lemma 0.1.20

$p : X \longrightarrow Y$ が fibration である事と、p が $0 \longrightarrow D^n \quad ({}^\forall n \geqq 1)$ に対し、RLP を持つことは同値である。

proof)　　（$\Longrightarrow$）D^n は projective chain より明らか。

（$\Longleftarrow$）逆に $n \geqq 1$ に対し、$y \in Y$ をとって、$h_y : R \longrightarrow Y_n$ を $h_y(1) = y$ で定義すれば、

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "g_n"] \arrow[d] & X_n \arrow[d, "p_n"] \\ R \arrow[r, "h_y"'] & Y_n \end{tikzcd}$$

の図式の lift があり、それを $f_y : R \longrightarrow X_n$ とおき、$x = f_y(1)$ とすれば、定義から $p_n(x) = y$ である。つまり、p_n は全射である。

□

Lemma 0.1.21

$f : X \longrightarrow Y$ が acyclic fibration である事と、p が $j_n : S^{n-1} \longrightarrow D^n \quad ({}^\forall n \geqq 0)$ に対し、RLP を持つことは同値である。

proof)　　（$\Longrightarrow$）j_n は cofibration だから、最後の MC4 の証明で示されるのでそちらを参照。

（$\Longleftarrow$）p が fibration であることは、

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "="] \\ S^{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j_n"'] & X \arrow[d, "p"] \\ D^n \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

の可換図式で下の図式に lift があるため、全体として lift が存在するため、Lemma 0.1.20 により示される。あとは p が weak equivalence であることを示す。fibration の

仮定にはないが、上の図式で $n=0$ のときも考案すれば、p_0 も全射となることがわかる。よって、$\mathrm{Ker}p=K$ とおけば、

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

が chain complex の短完全列となる。ホモロジー群の完全列から、K が acyclic であれば p が weak equivalence となる。ではそれを示そう。つまり、$K_{n+1} \longrightarrow K_n \longrightarrow K_{n-1}$ が exact であればいい。とはいえ chain complex であるから半分は示されている。

$$\begin{tikzcd}
K_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"'] & K_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"'] & K_{n-1} \arrow[d, "i"'] \\
X_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "p"'] & X_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "p"'] & X_{n-1} \arrow[d, "p"'] \\
Y_{n+1} \arrow[r, "\partial"] & Y_n \arrow[r, "\partial"] & Y_{n-1}
\end{tikzcd}$$

の可換図で縦列は exact である。$x \in K_n$ に対し、$\partial(x)=0$ とする。また、$p(x)=0$ でもある。よって、$S^n \longrightarrow D^{n+1}$ に対し、p が RLP を持つのだから、次元 n において、

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "g_x"] \arrow[d, "="'] & X_n \arrow[d, "p"] \\
R \arrow[r, "0"'] \arrow[ur, dotted, "f_n"] & Y_n
\end{tikzcd}$$

だが、明らかに $f_n=g_x$ である。(ただし、$g_x(1)=x$ である。)

また、次元 $n+1$ では、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, "="'] & X_{n+1} \arrow[d, "p"] \\
R \arrow[r, "0"'] \arrow[ur, dotted, "f_{n+1}"] & Y_{n+1}
\end{tikzcd}$$

となるが、ここで、$\partial \circ f_{n+1} = f_n$ となることをあわせると、$f_{n+1}(1)=y \in X_{n+1}$ で定義すれば、

$$\partial(y) = \partial \circ f_{n+1}(1) = f_n(1) = x$$

であり、かつ、$p(y) = p \circ f_{n+1}(1) = 0$ これより、$y \in K_{n+1}$ である。そして、$\partial(y)=x$ だったので、一番上の列が exact となる。

□

Definition 0.1.22 （*small object argument*）

DGM におけるある morphism の集合を、$F = \{f_\alpha : A_\alpha \longrightarrow B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ とおく。また、各 $\alpha \in \Lambda$ に対し、

$$S(\alpha) = \{\ (g,h) \in Map(A_\alpha, X) \times Map(B_\alpha, Y) \mid h \circ f_\alpha = p \circ g\ \}$$

で定義する。つまり、$f_\alpha : A_\alpha \longrightarrow B_\alpha$ に対し、

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_\alpha \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

を可換にする chain map 全体のことである。これにより、Λ、$S(\alpha)$ のすべての直和を考えると、

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\bigoplus_{S(\alpha)} A_\alpha \arrow[r, "\oplus\oplus g"] \arrow[d, "\oplus\oplus f_\alpha"'] & X \arrow[d, "p"] \\ \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\bigoplus_{S(\alpha)} B_\alpha \arrow[r, "\oplus\oplus h"'] & Y \end{tikzcd}$$

という可換図式が成り立つ。つまりは可換になるものすべてを持ってきて直和をとったわけである。ここで、

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\bigoplus_{S(\alpha)} A_\alpha \arrow[r, "\oplus\oplus g"] \arrow[d, "\oplus\oplus f_\alpha"'] & X \\ \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\bigoplus_{S(\alpha)} B_\alpha & \end{tikzcd}$$

の図式で pull-back をとったものを、$G^1(F,p)$ とおく。よって、

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\bigoplus_{S(\alpha)} A_\alpha \arrow[r, "\oplus\oplus g"] \arrow[d, "\oplus\oplus f_\alpha"'] & X \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, "p"] & \\
\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\bigoplus_{S(\alpha)} B_\alpha \arrow[r] \arrow[drr, "\oplus\oplus h"'] & G^1(F,p) \arrow[dr, dotted, "p_1"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

の可換図式が誕生する。同じようにして今度は、$p_1 : G^1(F,p) \longrightarrow Y$ から、

$$G^2(F,p) = G^1(F,p_1)\ ,\ p_2 = (p_1)_1 : G^2(F,p) \longrightarrow Y$$

が構成でき、$p = p_2 \circ i_2\ ,\ p_2 \circ i_2 = p_1$ が成立する。この構成を繰り返すと、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "p"] & G^1(F,p) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "p_1"] & G^2(F,p) \arrow[r] \arrow[d, "p_2"] & \cdots \arrow[r] & G^n(F,p) \arrow[r] \arrow[d, "p_n"] & \cdots \\
Y \arrow[r, "="'] & Y \arrow[r, "="'] & Y \arrow[r, "="'] & \cdots \arrow[r, "="'] & Y \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

の可換図が成り立つため、$G^\infty(F,p) = \mathrm{colim}_n G^n(F,p)$ とおけば、

$$i_\infty : X \longrightarrow G^\infty(F,p)\ ,\ p_\infty : G^\infty(F,p) \longrightarrow Y$$

が誘導され、$p = p_\infty \circ i_\infty$ を満たす。

Proposition 0.1.23

A が seauencially small ならば、$p_\infty : G^\infty(F,p) \longrightarrow Y$ は $f_\alpha \in F$ の $f_\alpha : A \longrightarrow B$ に対し RLP をもつ。

proof)　　次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & G^\infty(F,p) \arrow[d, "p_\infty"] \\
B \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

sequencially small の定義から、$g : A \longrightarrow G^\infty(F,p)$ に対し、

$$g_k : A \longrightarrow G^k(F,p)$$

が存在して自然な写像 $\pi : G^k(F,p) \longrightarrow G^\infty(F,p)$ に対し、$\pi \circ g_k = g$ となる。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g_k"] \arrow[d, "f"'] & G^k(F,p) \arrow[r, "i_k"] \arrow[d, "p_k"'] & G^{k+1}(F,p) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p_{k+1}"'] & G^\infty(F,p) \arrow[d, "p_\infty"] \\
B \arrow[r, "h"'] & Y \arrow[r, "="'] & Y \arrow[r, "="'] & Y
\end{tikzcd}$$

$(g_k, h) \in S(\alpha)$ であるため、$G^{k+1}(F,p)$ の構成を考えると、

$$h_k : B \longrightarrow G^{k+1}(F,p)$$

が存在し、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g_k"] \arrow[d, "f"'] & G^{k+1}(F,p) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p_{k+1}"'] & G^\infty(F,p) \arrow[d, "p_\infty"] \\
B \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, "h_k"] & Y \arrow[r, "="'] & Y
\end{tikzcd}$$

これより、$\pi \circ g_{k+1} : B \longrightarrow G^\infty(F,p)$ が求める lift である。

□

Theorem 0.1.24

DGM は Def 0.1.1 により model category となる。

proof) MC1 は R-module の圏が limit と colimit で閉じているため DGM でも閉じている。

続いて MC2 は $f : C \longrightarrow D$, $g : D \longrightarrow E$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
H_*(C) \arrow[rr, "(g\circ f)_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & H_*(E) \\
& H_*(D) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

の可換図で $f, g, g \circ f$ の二つが weak equivalence ということは、上の可換図でどれか二つが同型なので残り一つも同型で weak equivalence となる。

MC3 は weak equivalence と fibration の retract がまたそうなるのは良いと思う。cofibration についてだが、retract は単射になるのは簡単にわかる。あとは射影的加群についての条件だが、Lemma 0.1.3 により射影的加群の retract がまた射影的加群になるため成立する。

さてここからが本題の MC4 です。まず MC4 の) から。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"', "\simeq"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

の可換図で i が acyclic cofibration で、p が fibration とする。i が cofibration より、Lemma 0.1.2 から、各 P_k が projective module の P に対し、$B = A \oplus P$ と考えられる。

$$i : A \longrightarrow A \oplus P$$

が weak equivalence であるので、

$$i_* : H_*(A) \cong H_*(A \oplus P) \cong H_*(A) \oplus H_*(P)$$

であることから、$H_*(P) = 0$。つまり、P は acyclic である。Cor 0.1.14 により P は projective chain complex である。

$$p : X \longrightarrow Y$$

は fibration で全射なので、chain map

$$\tilde{h} : P \longrightarrow X$$

が存在し、$p \circ \tilde{h} = h$ を満たす。これにより、

$$f = g \oplus \tilde{h} : B \cong A \oplus P \longrightarrow X$$

で構成すれば、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"', "\simeq"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

が可換となる。続いて MC4 の　) を示す。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p", "\simeq"'] \\
B \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

を可換とし、i を cofibration、p を acyclic fibration とする。fibration の定義から、$p_k : X_k \longrightarrow Y_k$ は $k \geqq 1$ に対して全射である。しかし、今

$$(p_0)_* : H_0(X) \longrightarrow H_0(Y)$$

は同型である。$H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) = X_0/B_0(X)$ なので、

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "p_0"'] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "p_0"'] & H_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "(p_0)_*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_0(Y) \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & H_0(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

の図式を考えれば上下は exact であり、$p_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ が全射なのだから、$p_0 : B_0(X) \longrightarrow B_0(Y)$ は全射である。five lemma から

$$p_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$$

も全射となる。よって、$\mathrm{Ker} p = K$ として X の sub chain を定義する。

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

が chain complex の短完全列になり、ここから長いホモロジー群の完全列が誘導されるが、今 $p_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ は同型なので、$H_*(K) = 0$ となり、K は acyclic である。MC4 の　）と同様に i が cofibration なので、$B \cong A \oplus P$ であり、各 P_k が projective で、

$$f_k : P_k \longrightarrow X_k$$

が存在する。これが chain map ならば終わりなのだがそこまで単純ではない。ほしいのは、

$$\alpha : P \longrightarrow X$$

が chain map で、$p \circ \alpha = h$ となるものである。これは帰納的な構成を用いる。

$$\alpha_0 = f_0 : P_0 \longrightarrow X_0$$

から始める。今、$1 \leqq j < k$ のすべての j に対し、

$$\alpha_j : P_j \longrightarrow X_j$$

で、$\partial_j \circ \alpha_j = \alpha_{j-1} \circ \partial$, $p_j \circ \alpha_j = h_j$ を満たすものが存在したとする。このとき、

$$\alpha_k : P_k \longrightarrow X_k$$

を以下のように定義する。

$$H = \partial \circ f_k - \alpha_{k-1} \circ \partial : P_k \longrightarrow X_{k-1}$$

を考えると、

$$p_{k-1} \circ H = p_{k-1} \circ \partial \circ f_k - p_{k-1} \circ \alpha_{k-1} \circ \partial = \partial \circ h_k - h_{k-1} \circ \partial = 0$$

であるので、$H : P_k \longrightarrow K_{k-1}$ と考えられる。また、$\partial \circ H = 0$ となるのは簡単にわかる。これより、

$$H : P_k \longrightarrow Z_{k-1}(K)$$

と考えられる。K が acyclic なので、

$$\partial : K_k \longrightarrow B_{k-1}(K) = Z_{k-1}(K)$$

は全射である。P_k が projective であるため、

$$G : P_k \longrightarrow K_k$$

が存在して、$\partial \circ G = H$ となる。$i_k : K_k \longrightarrow X_k$ を inclusion とすれば、

$$\alpha_k = f_k - i_k \circ G : P_k \longrightarrow X_k$$

で定義する。このとき、$\partial \circ \alpha_k = \alpha_{k-1} \circ \partial$ が成り立ち、また、

$$p_k \circ \alpha_k = p_k \circ f_k = h_k$$

なので、最終的に

$$\beta = g \oplus \alpha : B = A \oplus P \longrightarrow X$$

とおけば、これが求める lift である。

最後に MC5 である。MC5 の　）から。まず、$f : X \longrightarrow Y$ に対し、$F = \{j_n : S^{n-1} \longrightarrow D^n\}_{n \geqq 0}$ で、$G^\infty(F, f)$ を考える。Def　0.1.22 により、

$$i_\infty : X \longrightarrow G^\infty(F, f)\ ,\ p_\infty : G^\infty(F, f)$$

によって、$f = p_\infty \circ i_\infty$ と分解できる。このとき、Lemma 0.1.21 と、Prop 0.1.23 により、p_∞ は acyclic fibration である。また構成法から、$G^{n+1}(F, f)$ は $G^n(F, f) \oplus S^n$ である。よって、$G^\infty(F, f) = X \oplus (\oplus_{n \geqq 0} S^n)$ である。

$$i_\infty : X \longrightarrow G^\infty(F, f)$$

は X への inclusion になるから、もちろん単射であり、この coker は $(\oplus_{n \geqq 0} S^n$ であり、もちろん各次元で projective なので i_∞ は cofibration である。

続いて MC5 の ）である。今度は $F = \{0 \longrightarrow D^n\}_{n \geqq 0}$ とおいて、$G^\infty(F, f)$ を考える。同じく Lemma 0.1.20 と、Prop 0.1.23 により、p_∞ は fibration であるまた、同じく i_∞ も cofibration であり、

$$G^\infty(F, f) = X \oplus (\oplus_{n \geqq 0} D^n)$$

であるため、加法性定理を考えれば、

$$(i_\infty)_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(G^\infty(F, p)) \cong H_*(X \oplus (\oplus D^n)) \cong \oplus H_*(X) \oplus H_*(D^n) = H_*(X)$$

が恒等射であるため、i_∞ は weak equivalence である。

□

この DGM の model 構造で projective module がだいぶ活躍しているが、projective でなければダメなのかというのは自然な疑問で、当然その双対の injective を考えたくなる。その際には次のように変えればよい。証明はこの手順を繰り返す事になると思うので省く。

Remmark 0.1.25

$f : C \longrightarrow D$ を chain map とするとき、

1. f が weak equivalence とは、$f_* : H_n(C) \longrightarrow H_n(D) \quad (n \geqq 0)$ が同型である。
2. f が cofibration とは、$f : C_n \longrightarrow D_n \quad (n \geqq 1)$ が単射である
3. f が fibration とは、$f : C_n \longrightarrow D_n \quad (n \geqq 1)$ が全射であり、$\mathrm{Ker} f_n$ が injective module である。

この choice によって DGM は model category となる。

より一般には cofibration の cokernel が cofibrant、fibration の kernel が fibrant になるように構成されている。