0.1 Frobenius ring 上の module

Definition 0.1.1

（可換）環 R が Frobenis ring（フロベニウス環）であるとは、R-module における projective module と injective module が一致することである。

Example 0.1.2

G : finite group、k : field としたとき、group ring である $k[G]$ は Frobenius ring である。

Definition 0.1.3

R を可換環とする。$f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(M, N)$ に対し、f, g が stably equivalent とは、$f - g : M \longrightarrow N$ に対し、${}^{\exists}L$: projective R-module s.t $f - g : M \longrightarrow L \longrightarrow N$ と分解できることである。このとき、$f \sim g$ と書く。

$g \circ f \sim 1$ となるとき、f, g は互いに stable inverce であるといい、f が stable inverce を持つとき、f は stable equivalence であるという。

Lemma 0.1.4

Stably equivalent は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(M, N)$ 上の同値関係である。

proof) まず反射律についてだが、$f - f = 0 : M \longrightarrow 0 \longrightarrow N$ と分解でき、0 は projective なので $f \sim f$ である。次に対称律は、$f \sim g$ をすると、$f - g : M \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} N$ と projective module を経由して分解できるが、

$$g - f : M \xrightarrow{-\alpha} P \xrightarrow{\beta} N$$

であるので $g \sim f$ である。最後に推移律は、$f \sim g$, $g \sim h$ とすると、

$$f - g : M \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} N \ , \ g - h : M \xrightarrow{\gamma} Q \xrightarrow{\delta} N$$

という分解があり、P, Q は projective であるが、$P \oplus Q$ も projective である。

$$(f-h)(x) = f(x)-h(x) = f(x)-g(x)+g(x)-h(x) = (f-g)(x)+(g-h)(x) = \beta\circ\alpha(x)+\delta\circ\gamma(x)$$

であるので、

$$f - h : M \xrightarrow{\alpha\oplus\gamma} \longrightarrow P \oplus Q \xrightarrow{\beta+\delta} N$$

という分解ができ、$f \sim h$ である。

□

Lemma 0.1.5

Stably equivalent は compsition で保たれる。つまり、$f \sim g$ ならば、$h \circ f \sim h \circ g$, $f \circ k \sim g \circ k$ である。

proof)　$f, g \in \mathrm{Hom}(M, N)$ に対し、$f \sim g$ とする。また、$h \in \mathrm{Hom}(N, L)$, $k \in \mathrm{Hom}(K, M)$ に対し、

$$h \circ f \circ k - h \circ \circ k : K \longrightarrow L$$

を考えたとき、$f \sim g$ なのだから、$f - g : M \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} N$ という分解で P が projective であるものがある。よって、

$$h \circ f \circ k - h \circ \circ k : K \xrightarrow{\alpha \circ k} P \xrightarrow{h \circ \beta} L$$

という分解ができる。

□

Definition 0.1.6

R を可換環としたとき、$\mathbf{Mod}_R$ を stable equivalence の class で局所化した圏を R-module の stable category と呼び、$\mathbf{Stab}_R$ とかく。つまりこれは、object は R-module で morphism の集合は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(M, N)/\sim$ である。

Theorem 0.1.7

R : Frobenius ring としたとき、$\mathbf{Mod}_R$ の morphism において、

1. weak equivalence is stable equivalence
2. fibration is surjection
3. cofibration is injection

という指定により cofibrantry generated model structure が定義できる。

proof)　1)　limit and colimit で閉じていることは良い。

2)　2-out-of-3

$f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ において、f, g が stable equivalence とする。このとき、

$$f' : Y \longrightarrow X \ , \ g' : Z \longrightarrow Y$$

をそれぞれ f, g の stable inverce とすれば、$f' \circ g' : Z \longrightarrow X$ は、

$$(g \circ f) \circ (f' \circ g') \sim 1 \quad , \quad (f' \circ g') \circ (g \circ f) \sim 1$$

となり、$g \circ f$ は stable inverce を持つので、$g \circ f$ は stable equivalence である。

また、$f, g \circ f$ が stable equivalence としたときは、

$$f' : Y \longrightarrow X \ , \ h : Z \longrightarrow X$$

をそれぞれ $f, g \circ f$ の stable inverce とすれば、

$$g' = f \circ h : Z \longrightarrow Y$$

を考えれば、

$$g \circ g' = g \circ f \circ h \sim 1$$

であり、

$$g' \circ g \sim g' \circ g \circ f \circ f' \sim f \circ h \circ g \circ f \circ f' \sim f \circ f' \sim 1$$

また $g, g \circ f$ を stable equivalence としても同様に f が stable equivalence となる。

3) Retract

全射、単射はすべて retract で閉じている。stable eauivalence についてのみ見ればよい。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "r_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "i_B"'] & Y \arrow[r, "r_B"'] & B \end{tikzcd}$$

の可換図で上下横列は恒等射、そして f が stable equivalence とする。このとき、$f' : Y \longrightarrow X$ を stable inverce とすると、$g' = r_A \circ f' \circ i_B : B \longrightarrow A$ とおく。

$$g' \circ g = r_A \circ f' \circ i_B \circ g = r_A \circ f' \circ f \circ i_A \sim r_A \circ i_A = 1$$

であり、また

$$g \circ g' = g \circ r_A \circ f' \circ i_B = r_B \circ f \circ f' \circ i_B \sim r_B \circ i_B = 1$$

である。

Lift propaty と factorization については以下で Lemma 等を証明してから示す。

Proposition 0.1.8

R を Frobenius ring とするとき、$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(X, Y)$ が fibration であることと、任意の $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(R, Y)$ に対し、$h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(R, X)$ で $f \circ h = g$ となるものが存在することは同値である。ただし、R は R の multiplication を作用として R-module と見ている。

proof)　　f を fibration とする。つまり、f 全射である。R は 1 元生成の free R-module であり、projective である。よって、projective の定義により $g : R \longrightarrow Y$ の lift は存在する。

逆に $y \in Y$ に対し、$g_y : R \longrightarrow Y$ を $g_y(1) = y$ で定める。このとき、$h : R \longrightarrow X$ で $f \circ h = g_y$ を満たすものが存在する。よって、$h(1) \in X$ に対し、$f(h(1)) = g_y(1) = y$ であり、f が全射である。

□

Lemma 0.1.9

M を R-module、P を projective R-module としたとき、$(1, 0) : M \longrightarrow M \oplus P$ は stable equivalence である。

proof)　　$pr_1 : M \oplus P \longrightarrow M$ を projection で定義すると、$pr_1 \circ (1, 0) = 1_M$ である。また、

$$(1, 0) \circ pr_1(m, p) - 1_{MoplusP}(m, p) = (0, -p)$$

であるので、

$$(1, 0) \circ pr_1 - 1_{M \oplus P} : M \oplus P \xrightarrow{pr_2} P \xrightarrow{(0,-1)} M \oplus P$$

と分解ができるので、$(1, 0)$ は stable equivalence

□

Lemma 0.1.10

$f \in Hom_{\mathbf{Mod}_R}(M, N)$ を stable equivalence としたとき、inclusion

$$i : \mathrm{Ker} f \longrightarrow X$$

は $i \sim 0$ である。

proof) $f' : N \longrightarrow M$ を f の stable inverce とする。

$$f' \circ f - 1_M : M \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} M$$

の分解がある。よって、$m \in \mathrm{Ker} f$ に対しては、

$$\beta \circ \alpha \circ i(m) = f' \circ f(m) - m = -m$$

であるので、

$$i - 0 = i : \mathrm{Ker} f \xrightarrow{\alpha \circ i} P \xrightarrow{-\beta} M$$

であるため、$i \sim 0$

□

Lemma 0.1.11

$f \in Hom_{\mathbf{Mod}_R}(M, N)$ を stable equivalence とし、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker} f \xrightarrow{i} M \longrightarrow \mathrm{Im} f \longrightarrow 0$$

は split 完全列であるとすると、$\mathrm{Ker} f$ は projective である。

proof) Lemma 0.1.10 により、inclusion

$$i : \mathrm{Ker} f \longrightarrow M$$

は $i \sim 0$ であった。つまり、

$$i : \mathrm{Ker} f \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} M$$

という projective を経由した分解がある。このとき、仮定から i の分解準同型

$$j : M \longrightarrow \mathrm{Ker} f$$

が存在する。今、

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "g:\mathrm{suj}"] \\ \mathrm{Ker}f \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

の図式を考えたとき、

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "h\circ j\circ\beta"] & X \arrow[d, "g:\mathrm{suj}"] \\ \mathrm{Ker}f \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

の左下は可換となる。このとき、P は projective であったから、

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dotted, "\gamma"] \arrow[dr, "h\circ j\circ\beta"] & X \arrow[d, "g:\mathrm{suj}"] \\ \mathrm{Ker}f \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

という右上を可換にする morphism が存在する。これより、

$$\gamma \circ \alpha : \mathrm{Ker}f \longrightarrow X$$

が h の lift である。よって $\mathrm{Ker}f$ は projective module である。

$\square$

Proposition 0.1.12

R を Forbenius ring としたとき、$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(X, Y)$ が acyclic fibration であることと、f が全射かつ、$\mathrm{Ker}f$ が projective であることは同値である。

proof)　　双方とも全射の条件は同じなのでそれ以外について見てみる。f が全射なので、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}f \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$$

という短完全列がある。

($\Longrightarrow$) f を acyclic fibration とする。f が stable equivalence なので、$f' : Y \longrightarrow X$ が存在し、$f \circ f' - 1 : Y \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} Y$ という projective をはさんだ分解がある。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker} f \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f+\beta) \arrow[r] & X \oplus P \arrow[r, "f+\beta"'] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

の可換図で上下横列はともに exact である。Lemma 0.1.9 により、中央縦列の

$$(1,0) : X \longrightarrow X \oplus P$$

は stable equivalence である。よって、2-out-of-3 によって、

$$f + \beta : X \oplus P \longrightarrow Y$$

も stable equivalence である。ここで、

$$f' \oplus (-\alpha) : Y \longrightarrow X \oplus P$$

により定義すると、

$$(f+\beta) \circ (f' \oplus (-\alpha))(y) = (f+\beta)(f'(y), -\alpha(y)) = f \circ f'(y) - \beta \circ \alpha(y) = y$$

であるため、図の下列は split する。これより、Lemma 0.1.11 が適用され、$\mathrm{Ker}(f+\beta)$ は projective である。また、上の図式を拡張して、

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker} f \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f+\beta) \arrow[r] \arrow[d] & X \oplus P \arrow[r, "f+\beta"] \arrow[d, "pr_2"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "="] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

の可換図で、左縦列以外はすべて exact なので 3×3Lemma により、ここも exact。つまり、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}f \longrightarrow \mathrm{Ker}(f+\beta) \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

が exact であり、P が projective なのでこれも split する。よって、$\mathrm{Ker}f$ は $\mathrm{Ker}(f+\beta)$ の retract であることが分解準同型の存在から導かれ、projective の retract は projective であるので $\mathrm{Ker}f$ は projective である。

($\Longleftarrow$) $\mathrm{Ker}f$ を projective とすると、injective でもあるので

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$$

は split する。よって、i, f の分解準同型をそれぞれ、

$$j : X \longrightarrow \mathrm{Ker}f\ ,\ g : Y \longrightarrow X$$

とおく。このとき、$f \circ g = 1_Y$ であり、$X \cong \mathrm{Ker}f \oplus Y$ の同型がこれら分解準同型で与えられていたのを思い出すと、

$$g \circ f + i \circ j = 1_X$$

である。よってこのことから、

$$g \circ f - 1_X : X \xrightarrow{-j} \mathrm{Ker}f \xrightarrow{i} X$$

となり、$g \circ f \sim 1_X$ である。よって、f は stable equivalence

□

Lemma 0.1.13 *Bear* の判定法

R を commutative ring とする。Q が injective R-module であることと、任意の R の ideal である A と、$f : A \longrightarrow Q$ に対し、$g : R \longrightarrow Q$ が存在し、$g \circ j = f$ となることは同値である。ただし、$j : A \longrightarrow R$ は inclusion

proof) Q が injective とすれば、$A \longrightarrow Q$ が R 上に lift するのは定義から明らかである。問題は逆であるが、

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\text{injective}"'] & Q \\ M & \end{tikzcd}$$

の図式を考え、これを可換にするような $M \longrightarrow Q$ を構成すればよい。N は M の sub module と見て、injective は inclusion と見なしておく。

$$G = \{(g, L) \mid N \subset L \subset M\ ,\ g : L \longrightarrow Q\ ,\ g_{|_N} = f\}$$

の集合を考え、順序を $(g, L) \leqq (g', L')$ を $L \subset L'$, ,$g'_{|_L} = g$ を満たすことと定義し、この順序による G の全順序部分集合 G_0 を一つ選ぶ。このとき、Zone Lemma により G_0 の極大元 (g_0, L_0) が存在する。

このとき $L_0 = M$ であることを示せば、g_0 が求める lift である。$L_0 \subset M$ ではあるから、今 $x \in M$, $x \notin L_0$ という元 x が存在すると仮定する。このとき、

$$N \subset L_0 \subset Rx + L_0 \subset M$$

であり、$I = \{s \in R \mid sx \in L_0\ \}$ とおくと、I は R の ideal である。また、$h : I \longrightarrow Q$ を $h(s) = g_0(sx)$ で定義する。仮定よりこれは、R 上に lift される。つまり、$\tilde{h} : R \longrightarrow Q$ が存在し、$\tilde{h}_{|_I} = h$ である。このとき、

$$\tilde{g} : Rx + L_0 \longrightarrow Q$$

を $\tilde{g}(rx + m) = \tilde{h}(r) + g_0(m)$ により定義する。これは well defined で準同型となる。

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "f"] & L_0 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "g_0"] & Rx + L_0 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\tilde{g}"] & M \\
Q \arrow[r, "="'] & Q \arrow[r, "="'] & Q &
\end{tikzcd}$$

の可換図を満たす。よって、$(g_0, L_0) \leqq (\tilde{g}, Rx + L_0)$ となり (g_0, L_0) が極大元ということに矛盾する。よって、$M = L_0$ である。

$\square$

Proposition 0.1.14

R を Frobenius ring とする。$I = \{A \hookrightarrow R \mid A$ は R の *ideal* $\}$ とおいたとき、f が acyclic fibration であることと、f が I の任意の morphism に対し RLP を持つことは同値である。

proof) $(\Longrightarrow)$ $f : X \longrightarrow Y$ は acyclic fibration であるとする。Prop 0.1.12 により、全射であり $\mathrm{Ker}f$ が projective である。よって、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$$

が split 完全列であるので、$X \cong \mathrm{Ker}f \oplus Y$ である。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ R \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

の可換図を考えたとき、

$$\gamma : A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}f \oplus Y \xrightarrow{pr_1} \mathrm{Ker}f$$

に対し、$\mathrm{Ker}f$ が injective であるため、$g : R \longrightarrow \mathrm{Ker}f$ で、$g \circ j = \gamma$ となるものが存在する。これより、

$$h = g \oplus \beta : R \longrightarrow \mathrm{Ker}f \oplus Y \cong X$$

で定義すれば、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ R \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

は可換となる。

($\Longleftarrow$)　　0 は R の自明な ideal なので、

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ R \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

が lift を持つということは、f が全射であるのと同値である。あとは $\mathrm{Ker}f$ が injective であることを示せばよい。任意の R の ideal である A と、$g : A \longrightarrow \mathrm{Ker}f$ をとる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i \circ g"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ R \arrow[r, "0"'] & Y \end{tikzcd}$$

は可換なので、図式を可換にする $h : R \longrightarrow X$ が存在する。これは $f \circ h = 0$ なので、$h : R \longrightarrow \mathrm{Ker}f$ と見れて、$h \circ j = g$ である。Lemma 0.1.13 により、$\mathrm{Ker}f$ は injective である。

□

Theorem 0.1.15

R : Frobenius ring としたとき、$\mathbf{Mod}_R$ の morphism において、

1. weak equivalence is stable equivalence
2. fibration is surjection
3. cofibration is morphism which has LLR for all acyclic fibrations

という指定により cofibrantry generated model structure が定義できる。

proof) closed composition、bicomplete、2-out-of-3、retract などは cofibration の指定が変わったが簡単に示せる。

まず generating cofibratins と acyclic cofibrations である I, J をそれぞれ、

$$I = \{A \hookrightarrow R \mid A \text{ は } R \text{ の } ideal\ \} \ \ , \ \ J = \{0 \longrightarrow R\}$$

とおいておく。A は R の sub R-module と見ているが、それは R 自身が 1 元生成の free R-module であるため、A もそうである。よって、A は $\mathbf{Mod}_R$ において sequencialy small である。当然 J の定義域の 0 もそうである。また、Lemma 0.1.14 と 0.1.8 により、acyclic fibration であることと I に対し RLP をもつこと、fibration であることと J に対し RLP は同値であった。これより、small object augument を用いて factorization を構成する。Lift propaty の一方は定義から明らかで、もう一方は factorization、retaract の性質を用いて示される。このあたりは chain complex や位相空間と同じ手順なので参考にすればよい。

□

proof of Thorem 0.1.7)

結局上での cofibration の指定と同値であることを示せばよい。

まず、$i : A \longrightarrow B$ を injection とし、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

の可換図を考え、p を acyclic fibration とする。このとき、Prop 0.1.12 により、p は全射かつ Ker$p$ が injective である。これより、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}p \xrightarrow{j} X \xrightarrow{p} Y \longrightarrow 0$$

の短完全列は split して、$X \cong \mathrm{Ker}p \oplus Y$ である。このとき、j, p 分解準同型をそれぞれ、

$$j' : X \longrightarrow \mathrm{Ker}p \ , \ p' : Y \longrightarrow X$$

を書くことにする。このとき、

$$g = p' \circ \beta \circ i - \alpha : A \longrightarrow X$$

をおくと、$p \circ g = 0$ となり、

$$g : A \longrightarrow \mathrm{Ker}p$$

と考えられる。また、i が injection で Ker$p$ が injective なのだから、

$$h : B \longrightarrow \mathrm{Ker}p$$

が存在し、$h \circ i = g$ を満たす。ここで、

$$k = p' \circ \beta - j \circ h : X \longrightarrow B$$

を考えれば、

$$p \circ k = p \circ p' \circ \beta - p \circ j \circ h = \beta$$

であり、

$$k \circ i = p' \circ \beta \circ i - j \circ h \circ i = p' \circ \beta \circ i - g = \alpha$$

となるので、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, "k"] & Y \end{tikzcd}$$

が可換となる。

逆に任意の acyclic fibration に対し、$i : A \longrightarrow B$ は LLP を持つとする。A の injective resolusion を考えたとき、

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} Q_0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_2 \longrightarrow \cdots$$

であるが、ε は単射で Q_* は injective である。具体的には、Q_0 を A で生成された free R-module として inclusion により ε を定義すればよい。このとき、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "i"'] & Q_0 \arrow[d] \\ B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

の図式を考えれば、$Q_0 \longrightarrow 0$ は全射で Ker が Q_0 で projective であるため acyclic fibration である。仮定により、$h : B \longrightarrow Q_0$ で $h \circ i = \varepsilon$ をなるものが存在する。このとき、ε が単射なので i も単射である。

□