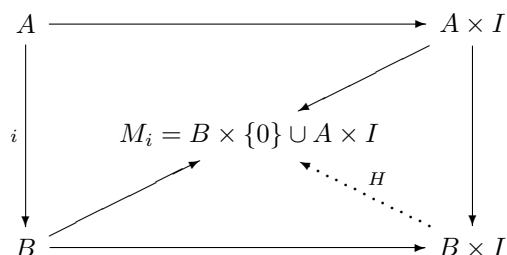


Definition 0.1.1

1. weak equivalence を homotopy equivalence
2. fibration を Hurewicz fibration
3. cofibration を closed cofibration

Lemma 0.1.2

proof) i の制限により、 $i: A \rightarrow i(A)$ は連続な全単射であることは分かるので、あとは逆写像を考えればよい。このとき、 i の Mapping cylinder を考えると、 B からあるいは $A \times I$ からの M_i への inclusion を考えることにより、

☐

closed cofibration は retract で閉じている。

proof) 通常の cofibration が retract で閉じているのは簡単に示せる。問題は closed cofibration であるかどうかである。

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{f'} & A \\
 \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow i \\
 B & \xrightarrow{g} & D & \xrightarrow{g'} & B
 \end{array}$$

の可換図において、 j が closed cofibration で上下の横列の合成が恒等射とする。このとき、 $i(A)$ についてみて見る。 $g \circ i(A) = j \circ f(A)$ であるので、 $i(A) \subset g^{-1}(j \circ f(A)) \subset g^{-1}(j(C))$ である。一方、 $i \circ f'(C) = g \circ j(C)$ であるので、

$$j(C) \subset g'^{-1}(i \circ f'(C)) = g'^{-1}(i(A))$$

である。よって、

$$i(A) \subset g^{-1}(j(C)) \subset g^{-1}(g'^{-1}(i(A))) = (g' \circ g)^{-1}(i(A)) = i(A)$$

となり、 $i(A) = g^{-1}(j(C))$ 。Lemma 0.1.2 より、 $j(C)$ は closed in D であり、 $g : \text{cont}$ より $i(A)$ は closed in B であり、Lemma 0.1.2 により A は closed である。□

Proposition 0.1.4

$(X, A) : \text{DR-pair} \iff i : A \longrightarrow X$ は closed cofibration かつ、homotopy equivalence

proof) $(\implies)$ (X, A) が DR-pair とする。 $(X, A) : \text{NDR-pair}$ でもあるので、 $i : A \longrightarrow X$ は closed cofibration。また、 (H, u) を DR 表現とすると、 $H_1 : X \longrightarrow A$ が i の homotopy inverse であることは定義よりわかる。

$(\impliedby)$ $i : A \longrightarrow X$ を closed cofibration かつ homotopy equivalence とする。このとき、前半の仮定から、 (X, A) の NDR 表現 (H, u) が存在する。このとき、 $v : X \longrightarrow I$ を、 $v(x) = \frac{1}{2}u(x)$ により定義すれば、 $v^{-1}(0) = A$, $v(x) < 1$ となる。このとき、

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 \swarrow = & & \searrow i \\
 A & \xrightarrow{i} & X
 \end{array}$$

の可換図で、 i が cofibration かつ homotopy equivalence ということは、 i は cofiber homotopy equivalence である。その cofiber homotopy inverse を、 $j: X \rightarrow A$ とし、 $1 \simeq i \circ j \text{ rel } A$ を繋ぐ homotopy を G とすれば、

$$G(a, t) = a, \quad G(x, 0) = x, \quad G(x, 1) \in A$$

である。

□

Proposition 0.1.5

$p: E \rightarrow B$ を fibration、 $(X, A): \text{DR-pair}$ とするとき、 $i: A \rightarrow X$ は p に対し LLP をもつ。

proof) 次の可換な図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

また、 (H, u) を (X, A) の DR 表現とする。このとき、 $F: X \times I \rightarrow X$ を、

$$F(x, t) = \begin{cases} H(x, 1 - t/u(x)) & t \leq u(x) \\ H(x, 0) & u(x) \leq t \end{cases}$$

で定義する。

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{H_1} & A & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & & \downarrow \tilde{H} & \nearrow i & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

このとき、 $G: X \rightarrow E$ を、 $G(x) = \tilde{H}(x, u(x))$ で定義する。

$$p \circ G(x) = p \circ \tilde{H}(x, u(x)) = g \circ F(x, u(x)) = g \circ H(x, 0) = g(x)$$

であり、また、

$$G \circ i(a) = G(a) = \tilde{H}(a, u(a)) = \tilde{H}(a, 0) = f \circ H_1(a) = f(a)$$

であるので G が求める Lift である。

□

Corollary 0.1.6

$p : E \longrightarrow B$ を fibration、 $i : A \longrightarrow X$ を closed cofibration かつ homotopy equivalence とすると、 i は p に対し LLP をもつ。

Lemma 0.1.7

$p : E \longrightarrow B$ を fibration とし、 $i : A \longrightarrow X$ を closed cofibration とするとき、inclusion

$$X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow X \times I$$

は p に対し LLP を持つ。

proof) (X, A) は NDR-pair である。また、 $(I, \{0\})$ は DR-pair であるのでこれらの直積 $(X \times I, X \times \{0\} \cup A \times I)$ は DR-pair である。よって、Prop 0.1.5 により示される。

□

Proposition 0.1.8

$i : A \longrightarrow X$ を closed cofibration とし、 $p : E \longrightarrow B$ を fibration かつ homotopy equivalence とすると、 i は p に対し LLP を持つ。

proof) 次の可換図、

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ & \searrow p & \swarrow = \\ & & B \end{array}$$

によって、 p は fiber homotopy equivalence となる。よってその fiber homotopy inverce を、 $s : B \longrightarrow E$ とすると、 $p \circ s = 1_B$, $s \circ p \simeq 1_E$ となるが、このときその fiber homotopy を、 $H : E \times I \longrightarrow E$ とおけば、

$$\begin{array}{ccc} E \times I & \xrightarrow{H} & E \\ \downarrow p \times 1 & & \downarrow p \\ B \times I & \xrightarrow{pr_1} & B \end{array}$$

が可換である。よって、 $F : X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow E$ を

$$F(x, 0) = s \circ g(x) \quad , \quad F(a, t) = H(f(a), t) \quad (x \in X, a \in A)$$

により定義すれば、 $a \in A$ に対し、 $H(f(a), 0) = s \circ p \circ f(a) = s \circ g \circ i(a) = s \circ g(a)$ なので F は連続写像である。このとき、 $p_X : X \times I \longrightarrow X$ を第一成分への射影とすると、 $x \in X$ に対し、

$$p \circ F(x, 0) = p \circ s \circ g(x) = g(x) = g \circ p_X(x, 0)$$

であり、また $(a, t) \in A \times I$ に対しては、

$$p \circ F(a, t) = p \circ H(f(a), t) = pr_1 \circ (p \times 1)(f(a), t) = g(a) = g \circ p_X(a, t)$$

であるため、次の図式は可換。

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{F} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{g \circ p_X} & B \end{array}$$

Lemma 0.1.8 により、この図式は lift を持つので、それを $\tilde{F} : X \times I \longrightarrow E$ とおく。このとき、制限

$$\tilde{F}_1 : X \longrightarrow E$$

を考えれば、 $(\tilde{F}_1)|_A(a) = F_1(a) = H(f(a), 1) = f(a)$ であるので、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{F}_1 & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

が可換となり、題意が示される。

□

残るは functorial factorization であるが、これがかなりの面倒さをはらんでいる。すぐに気づくとおおり、 $f : X \longrightarrow Y$ の分解として妥当そうなものは、 $X \longrightarrow M_f \longrightarrow Y$ と $X \longrightarrow E_f \longrightarrow Y$ である。つまり Mapping cylinder と Mapping track であるが残

念ながら惜しい。しかし、アイデア的にはこれ以外ないのでこれを頼る以外ない。つまり、これらをもう少し改良してどうにかならないかというわけである。ここではその分解だけを与えて証明は省略することにする。丁寧に証明すれば10ページはくだらないからである。友人の修論にその詳細が綴っており、この節もそれを大いに参考にさせてもらった。この場を借りて感謝したい。

Theorem 0.1.9

$f : X \longrightarrow Y$ に対し、 $E_f = \lim(X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{ev_0} M(I, Y))$ とし、

$$\hat{E}_f = (X \times I) \coprod (E_f \times (0, 1]) / \sim$$

により商空間として定義する。ただし、 $(x, t) \sim ((x, c_f(x)), t)$ ($t > 0$) とする。このとき、

$$i_f : X \longrightarrow \hat{E}_f, \quad e_f : \hat{E}_f \longrightarrow E_f, \quad p_f : E_f \longrightarrow Y$$

をそれぞれ、

$$i_f(x) = [x, 0], \quad e_f[x, t] = (x, c_f(x)), \quad e_f[(x, w), t] = (x, w), \quad p_f(x, w) = w(1)$$

で定義する。 p_f が fibration になることは良く知られている。さらにこのとき、 i_f は closed cofibration かつ homotopy equivalence であり、 e_f は fibration となる。これはわりと簡単に示せる。さらに、

$$Z_f = Y \coprod \hat{E}_f \times (0, 1]$$

で定義する。ただし、 Z_f の位相は直和位相ではなく、

$$q_f : Z_f \longrightarrow Y, \quad u_f : Z_f \longrightarrow I, \quad \alpha_f : Z_f - Y \longrightarrow \hat{E}_f \times I$$

の写像をそれぞれ、

$$q_f(y) = y, \quad q_f(\hat{e}_f, t) = p_f \circ e_f(\hat{e}_f), \quad u_f(y) = 0, \quad u_f(\hat{e}_f, t) = t, \quad \alpha_f(\hat{e}_f, t) = (\hat{e}_f, t)$$

と定義したとき、この3つの写像がすべて連続になるような最弱の位相を Z_f に入れる。このとき、 $j_f : \hat{E}_f \longrightarrow Z_f$ を、 $j_f(\hat{e}_f) = (\hat{e}_f, 1)$ で定義するとこれは連続に成り、しかも closed cofibration であることが分かる。さらに、 q_f が fibration でありかつ

homotopy equivalence であることも示され、

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 i_f \downarrow & \nearrow p_f & \uparrow q_f \\
 & E_f & \\
 \hat{E}_f \nearrow e_f & & \\
 \hat{E}_f & \xrightarrow{j_f} & Z_f
 \end{array}$$

の図式が可換になることから $f: X \rightarrow Y$ の 2 通りの分解が考えられ、それらの対応は functorial factorization となる。

Theorem 0.1.10

Def 0.1.1 の choice により位相圏は model 圏となる。