## 0.1　位相圏

位相圏のモデル構造は、DGM のそれと余り変わらない。が、ここで言う model category である事示すためには、fibration を Serre fibration とし、weak equivalence を weak homotopy equivalence とする。この場合 cofibration の指定の仕方が色々あるのだが最もわかりやすいのは relative cell complex での inclusion （その retract）としてしまう方法だが、証明をする過程では次のようにしておいたほうが都合が良いので以下のように定義する。

### Definition 0.1.1

$f : X \longrightarrow Y$ を連続写像とするとき、

1. $f$ が weak equivalence とは、$f_* : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y) \quad (n \geqq 0)$ が全単射である。
2. $f$ が fibration とは、Serre fibration である。
3. $f$ が cofibration とは、任意の acyclic fibration に対し LLP を持つ。

この choice によって位相圏は model category となるわけですがそれにはやっぱり準備が必要です。

気になるのは fibration と cofibration の指定です。cofibration は MC4 の１つを満足させるために定義されたとしか思えません。そして fibration はより一般的な Hurewiz fibration ではなく、Serre fibration を指定するからにはこの構造の鍵となるのは CW 複体ということになります。というより Serre fibration には次のような性質があります。

### Lemma 0.1.2

$p : X \longrightarrow Y$ が Serre fibration である事と、任意の $n \geqq 0$ に対し、$p$ が inclusion $i_n : D^n \times \{0\} \longrightarrow D^n \times I$ に対し、RLP を持つ事は同値である。

proof)　$D^n$ は CW 複体なので $\Longrightarrow$ は成立する。この逆を示そう。$A$ を CW 複体とする。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

が可換とする。このとき、$A^{(0)}$ が離散空間なので、仮定から $D^0 \longrightarrow D^0 \times I$ に対し $p$ が RLP を持つので、

$$\begin{tikzcd} A^{(0)} \arrow[r, "g_0"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ A^{(0)} \times I \arrow[r, "h_0"'] \arrow[ur, "f_0"] & Y \end{tikzcd}$$

を可換とする $f_0 : A^{(0)} \times I \longrightarrow X$ が存在する。ただし、$g_0, h_0$はそれぞれ $g, h$ の制限である。続いて、$1 \leqq {}^{\forall} m \leqq n-1$ に対し、

$$\begin{tikzcd} A^{(m)} \arrow[r, "g_0"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ A^{(m)} \times I \arrow[r, "h_0"'] \arrow[ur, dotted, "f_m"] & Y \end{tikzcd}$$

を可換とする $f_m : A^{(m)} \times I \longrightarrow X$ が存在するとする。このとき、$f_n : A^{(n)} \times I \longrightarrow X$ を次のように定義する。$A^{(n)} \cong A^{(n-1)} \cup (\coprod D^n)$ であるため、各 $n$ 胞体

$$\varphi : D^n \longrightarrow A$$

を考えると、

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ D^n \times I \arrow[r, "\varphi \times 1"'] & A \times I \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

の可換図から Lift

$$\tilde{\varphi} : D^n \times I \longrightarrow X$$

を考える事ができる。これより、

$$f_n = f_{n-1} \cup (\coprod \tilde{\varphi}) : A^{(n)} \times I \cong (A^{(n-1)} \times I) \cup (\coprod D^n \times I) \longrightarrow X$$

が定義され、

$$
\begin{tikzcd}
A^{(n)} \arrow[r, "g_n"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\
A^{(n)} \times I \arrow[r, "h_n"'] \arrow[ur, "f_n"] & Y
\end{tikzcd}
$$

は可換である。これより、

$$\mathrm{colim}_n f_n : A \times I \longrightarrow X$$

が求める Lift である。

$\square$

## Lemma 0.1.3

$p : X \longrightarrow Y$ が Acyclic fibration である事と、任意の $n \geqq 0$ に対し、$p$ が inclusion $j_n : S^{n-1} \longrightarrow D^n$ に対し、RLP を持つ事は同値である。

## Definition 0.1.4

位相空間 $X$ に対し、$X$ にいくつかの胞体を貼り付けて構成される空間を $Y$ とするとき、$(Y, X)$ を relative cell complex と呼ぶ。つまり、$X_0 = X \cup (\coprod D^0)$ から始め、$X_n = X_{n-1} \cup (\coprod D^n)$ の構成を続け、$Y = \mathrm{colim}_n X_n$ とするわけである。つまり普通の Cell Complex の構成を $X^{(0)}$ からではなく、$X$ から始めて構成するわけである。

## Proposition 0.1.5

$A$ を有限の CW 複体とする。

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots X_n \longrightarrow X_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

に対し、各 $(X_{n+1}, X_n)$ は relative cell complex とする。このとき、

$$\mathrm{colim}_n \mathrm{Hom}(A, X_n) \cong \mathrm{Hom}(A, \mathrm{colim}_n X_n)$$

proof)　　$A$ が有限の CW 複体ということは $A$ が compact という事に他ならない。よって、$f \in \mathrm{Hom}(A, \mathrm{colim}_n X_n)$ に対し、$f$ による $A$ の Image はある $X_n$ に含まれることから示される。

□

**Theorem 0.1.6**

Def 0.1.1 によって位相空間の圏は model category となる。

proof)　まず 3 つの morphism が閉じているかですが、cofibration 以外は良いと思います。$f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ を cofibration とするとき、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g\circ f"'] & X \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

の可換図で $p$ が acyclic fibration とする。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta\circ g"'] & Y \end{tikzcd}$$

の可換図で $f$ が cofibration なのだから、この Lift

$$\tilde{\alpha} : B \longrightarrow X$$

が存在する。これより、

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

の可換図でもう一度 Lift が存在するので、それを $\gamma : C \longrightarrow X$ とおけば、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g\circ f"'] & X \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, "\gamma"] & Y \end{tikzcd}$$

は可換である。

MC1 は良いと思う。MC2 は weak equivalence の定義から考えればすぐにわかる。MC3 も調べればわかる。また、MC4 の 1) は定義そのままである。次に MC5 の 1) であるが、DGM の時の Glowing Constraction を思い出す。$f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$F = \{j_n : D^n \times \{0\} \longrightarrow D^n \times I\}_{n \geqq 0}$$

とおき、$G^\infty(F, f)$ を考える。このとき、

$$\begin{tikzcd}
D^n \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "j_n"'] & G^\infty(F, f) \arrow[d, "p_\infty"] \\
D^n \times I \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

は $G^\infty(F, f)$ の定義から Lift を持つため、Lemma 0.1.2 により $p_\infty$ は fibration である。

ところで、$G^1(F, f) = X \cup (\coprod D^n \times I)$ であるため、

$$i_1 : X \longrightarrow G^1(F, f)$$

は強変位 retract である。つまり weak equivalence である。また、$p : E \longrightarrow B$ を fibration として、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\
G^1(F, f) \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

の可換図式に対し、Lemma 0.1.2 により、

$$\begin{tikzcd}
\coprod D^n \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "i_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\coprod D^n \times I \arrow[r] & G^1(F, f) \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

の可換図の Lift が存在するためそれを、

$$\alpha : \coprod D^n \times I \longrightarrow E$$

とおけば、$\beta = g \cup \alpha : G^1(F, f) \longrightarrow E$ に対し、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ G^1(F,f) \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

は可換となる。よって、$i_1$ は cofibration である。つまり、$i_1$ は acyclic cofibration である。同様に、$i_k : G^{k-1}(F, f) \longrightarrow G^k$ が acyclic cofibration となり、$i_\infty : X \longrightarrow G^\infty(F, f)$ も acyclic cofibration である事が示される。

次に MC5 の 2) であるが、今度は、

$$F = \{j_n : S^{n-1} \longrightarrow D^n\}_{n \geqq 0}$$

とおいて、$G^\infty(F, f)$ を考える。このとき、

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "j_n"'] & G^\infty(F,f) \arrow[d, "p_\infty"] \\ D^n \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

が Lift を持つため、Lemma 0.1.3 によって、$p_\infty$ は acyclic fibration であることがわかる。また、先の MC5 の 1) と同様の構成で、$i_\infty$ が任意の acyclic fibration に対し LLP を持つ事も示されるため、cofibration である事もわかる。

残るは MC4 の 2) である。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

の可換図において、$i$ が acyclic cofibration で $p$ を fibration とする。MC5 により、$i$ を $i = p' \circ i'$ を分解する。ただし、$i'$ は acyclic cofibration で $p'$ は fibration とする。$i$ 自身が weak equivalence なので、MC2 により、$p'$ は acyclic fibration である。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"'] & B' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "="'] & B \end{tikzcd}$$

の可換図から Lift である、$\alpha : B \longrightarrow B'$ が存在する。これにより、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "="] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[r, "="] \arrow[d, "i'"'] & A \arrow[d, "i"] \\ B \arrow[r, "\alpha"'] & B' \arrow[r, "p'"'] & B \end{tikzcd}$$

の図式が可換となって、これより $i$ は $i'$ の retract である事がわかり、$i'$ は MC5 を振り返ると、任意の fibration に対し LLP を持っていた。よって、その retract も同様である。

$\square$

## Theorem 0.1.7

$i : A \longrightarrow B$ が cofibration であることと、$i$ が relative cell complex の間の inclusion の retract である事は同値である。

proof)　　$\Longrightarrow$ から示す。MC5 の証明を思い出すと、$i$ は cofibration である $i' : A \longrightarrow G^{\infty}(F, i)$ と acyclic fibration である $p' : G^{\infty}(F, i) \longrightarrow B$ により $i = p' \circ i'$ と分解できる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"'] & G^{\infty}(F, i) \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "="'] & B \end{tikzcd}$$

仮定よりこの図式は Lift を持つので、それを $\alpha : B \longrightarrow G^{\infty}(F, i)$ とおく。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "="] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[r, "="] \arrow[d, "i'"'] & A \arrow[d, "i"] \\ B \arrow[r, "\alpha"'] & G^{\infty}(F, i) \arrow[r, "p'"'] & B \end{tikzcd}$$

を考えれば、$i$ は $i'$ の retract であり、$i' : A \longrightarrow G^{\infty}(F, i)$ は定義から $(G^{\infty}, A)$ が relative cell complex だったので成立する。¥vspace1zw

$\Longleftarrow$ を示す。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[h]{} & Y \end{array}$$

で $p$ を acyclic fibration とする。Lemma 0.1.3 によりこれは $S^{n-1} \longrightarrow D^n$ に対し RLP を持つため、それらの Lift と $g$ を張り合わせて、元の図式の Lift を構成することができる。なぜなら、$B$ は仮定より $A$ に胞体を接着した空間と考えて問題ないからだ。

$\square$

## Corollary 0.1.8

$f : X \longrightarrow Y$ を連続写像とするとき、

1. $f$ が weak equivalence とは、$f_* : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y) \quad (n \geqq 0)$ が全単射である。
2. $f$ が fibration とは、Serre fibration である。
3. $f$ が cofibration とは、relative cell complex の inclusion の retract とする。

この choice によって位相圏は model category となる。

この構成について疑問に思う節も多いと思う。特に fibration はより一般的な Hurewiz fibration を使うわけには行かないのか。cofibration は通常の cofibration、あるいは NDR 対の inclusion である closed cofibration を用いたらどうであろうか。weak equivalence は homotopy equivalence で構成してみたらどうだろうか。なんて夢は膨らむ。それについては Mark Hovey の本に詳しく載っている。