

0.1 Homotopy

left homotopy と right homotopy の双方を同時に考える必要がある。

Lemma 0.1.1

$f, g : A \longrightarrow X$ に対し、

1. $A : \text{cofibrant}$ で、 $f \stackrel{l}{\sim} g$ ならば、 $f \stackrel{r}{\sim} g$
2. $A : \text{fibrant}$ で、 $f \stackrel{r}{\sim} g$ ならば、 $f \stackrel{l}{\sim} g$

proof) 1) を示す。仮定より、 A の good cylinder object

$$A \amalg A \xrightarrow{i_0+i_1} A \wedge I \xrightarrow{j} A$$

と、 f, g の homotopy である $H : A \wedge I \longrightarrow X$ が存在する。 $A : \text{cofibrant}$ なので、 $i_0 : A \longrightarrow A \wedge I$ は acyclic cofibration である。 X の good path object、

$$X \xrightarrow{q} X^I \xrightarrow{(p_0, p_1)} X \times X$$

を選ぶ。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q \circ f} & X^I \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \wedge I & \xrightarrow{(f \circ j, H)} & X \times X \end{array}$$

の図式は共に (f, f) となるため、可換である。MC4 によりこの Lift が存在するため、それを、

$$\tilde{H} : A \wedge I \longrightarrow X^I$$

とおく。このとき、 $i_1 : A \longrightarrow A \wedge I$ に対し、

$$\tilde{H} \circ i_1 : A \longrightarrow X^I$$

を考えれば、

$$p_0 \circ \tilde{H} \circ i_1 = f \circ j \circ i_1 = f$$

であり、

$$p_1 \circ \tilde{H} \circ i_1 = H \circ i_1 = g$$

なので、 $\tilde{H} \circ i_1$ が f, g の right homotopy である。2) も同じようにして示せる。

□

Definition 0.1.2

$f, g : A \longrightarrow X$ が homotopic であるとは、 $f \stackrel{l}{\sim} g$ かつ、 $f \stackrel{r}{\sim} g$ であるときのことを言う。このとき単に $f \sim g$ とかく。

$f : A \longrightarrow X$, $g : X \longrightarrow A$ に対し、 $g \circ f \sim 1$, $f \circ g \sim 1$ を満たすとき、 f, g は互いに homotopy inverse と呼び、homotopy inverse を持つときその morphism を homotopy equivalence と呼ぶ。

また、 $A : \text{cofibrant}$ で、 $X : \text{fibrant}$ ならば、 $\sim$ は $\text{Hom}_C(A, X)$ における同値関係となり、その同値類を $\pi(A, X)$ とかく。

Remmark 0.1.3

$A : \text{cofibrant}$ で、 $X : \text{fibrant}$ とする。 $f \stackrel{l}{\sim} g$ または、 $f \stackrel{r}{\sim} g$ ならば、 $f \sim g$ である。

Lemma 0.1.4

$f : A \longrightarrow X$ に対し、 A, X が共に fibrant かつ cofibrant ならば、 f が weak equivalence であることと homotopy equivalence であることは同値である。

proof) $f : A \longrightarrow X$ を weak equivalence とする。MC5 と MC2 より、

$$f : A \xrightarrow{j} C \xrightarrow{p} X$$

で、 $j : \text{acyclic cofibration}$ で、 $p : \text{acyclic fibration}$ と取れる。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{=} & A \\ \text{node} * j \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\quad} & C \end{array}$$

$A : \text{fibrant}$ より MC4 が使えて、この図式の lift を $r : C \longrightarrow A$ とおくと、 $r \circ j = 1$ であることはわかる。また、

$$j^* : \pi^r(C, C) \longrightarrow \pi^r(A, C)$$

は全単射であったので、

$$j^*[j \circ r] = [j \circ r \circ j] = [j] = j^*[1]$$

により、 $j \circ r \sim 1$ であるため、Remmark 0.1.3により、 $j \circ r \sim 1$ であるため、まず j は homotopy inverse である r をもつ。同じようにして p も homotopy inverse である s を持つので、 $f = p \circ i$ を考えれば、 $r \circ s$ が f の homotopy inverse である。

逆に f が homotopy equivalence とし、その homotopy inverse を $g : X \rightarrow A$ とする。このとき、 $f \circ g$ と 1_X の left homotopy を、

$$H : X \wedge I \rightarrow X$$

とする。MC5 により、

$$f : A \xrightarrow{j} C \xrightarrow{p} X$$

の分解で j : acyclic cofibration と p : fibration としてとれる。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j \circ g} & C \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ X \wedge I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

で X が cofibrant なので i_0 が acyclic cofibration であり MC4 からこの図式の lift

$$\tilde{H} : X \wedge I \rightarrow C$$

が存在する。

$$s : X \xrightarrow{i_1} X \wedge I \xrightarrow{\tilde{H}} C$$

と $p \circ s = 1$ である。また、分解から容易にわかるように C も fibrant であり cofibrant である。 j は weak equivalence であるから、前半の議論からその homotopy inverse $r : C \rightarrow A$ が存在する。 $p \sim p \circ j \circ r = f \circ r$ また、 $s \circ j \circ g$ であったので、

$$s \circ p \sim j \circ g \circ f \circ r \sim j \circ r \sim 1$$

よって、恒等射は weak equivalence であり、それと homotopic な $s \circ p$ も weak equivalence であるため、

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{=} & C & \xrightarrow{=} & C \\ p \downarrow & & s \circ p \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

の図式から MC3 の retract によって、 p が weak equivalence であることがわかる。 $f = p \circ j$ で j はもともと weak equivalence であったので f は weak equivalence である。

□