

モデル圏の定義と基本性質

モデル圏とは、位相空間のようにホモトピー論を行うための圏である。D.Quillen によって [Qui] で登場して以降、定義はより洗練され [Hov] や [Hir] などが登場するものが現在では親しまれていると思う。初めてモデル圏のことを学ぶには [DS] がおすすめ。Quillen は従来のホモトピー論の中核を担っているのが、3種類の射である事に気が付いた。この射の性質を公理化することにより、位相空間以外の圏でもホモトピー論を展開できることに着眼した。

定義 0.1. 圏 M がモデル圏とは、次の3種類の合成で閉じた M の射（部分圏）、コファイブレーション (cofibration, $\hookrightarrow$), ファイブレーション (fibration, $\twoheadrightarrow$), 弱同値 (weak equivalence, $\xrightarrow{\sim}$) が指定され、次の5つの条件を満たす。

1. M は任意の極限と余極限を持つ。
2. 合成射 $g \circ f$ に対し、 $f, g, g \circ f$ のいずれか2つが弱同値ならば、残り一つも弱同値である。
3. 射 f は g のレトラクトであり、 g が弱同値（コファイブレーション、ファイブレーション）ならば、 f もそうである。
4. 次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

で、 i がコファイブレーション、 p がファイブレーションとする。このときさらに、 p か i が弱同値ならば、図式を可換にする斜め向きの射 $B \rightarrow X$ が存在する。

5. 任意の射 f は弱同値かつコファイブレーション i と、ファイブレーション p で $f = p \circ i$ と分解できる。またコファイブレーション j と、弱同値かつファイブレーション q で $f = q \circ j$ と分解できる。

もう少し、用語を用意しておけば、もう少し簡単に述べることもできる。

定義 0.2. 圏 C において、 $i: A \rightarrow B, p: X \rightarrow Y$ を考える。任意の可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

に対し、 $h: B \rightarrow X$ が存在し、 $h \circ i = f, p \circ h = g$ を満たすとき、 i は p に対し LLP (Left Lifting Property) を持つといい、逆に p は i に対し RLP (Right Lifting Property) を持つという。

定義 0.3. モデル圏 M において、(コ) ファイブレーションかつ弱同値である射を自明な (コ) ファイブレーションと呼ぶことにする。よって、モデル圏の定義を簡潔に述べると以下ようになる。

圏 M がモデル圏とは、次の3種類の合成で閉じた M の部分圏、 C (コファイブレーション), F (ファイブレーション), W (弱同値) が指定され、次の5つの条件を満たす。

1. M は任意の極限と余極限を持つ。
2. 合成射 $g \circ f$ に対し、 $f, g, g \circ f$ のいずれか2つが弱同値ならば、残り一つも弱同値である。
3. C, F, W はいずれもレトラクトで閉じている。

4. コファイブレーションは自明なファイブレーションに対し LLP を持つ。また、ファイブレーションは自明なコファイブレーションに対し RLP を持つ。
5. 任意の射 f は、2 種類の分解 $f = p \circ i = q \circ j$ を持ち、 $p \in F, i \in W \cap C, q \in W \cap F, j \in C$ である。

同じ圏でもモデル圏の構造は一つではない。例えば、弱同値を同型射、ファイブレーションとコファイブレーションを任意の射と指定すれば、どんな圏でもモデル圏になってしまう。用途に応じて適切なホモトピーを用いれるようなモデル構造を見つけるのが重要である。以下で代表的なモデル圏を紹介する。モデル圏になっていることの証明は非常に複雑で難しいが、とりあえず例だけ挙げておく。

例 0.4. 以下はモデル圏の例である。

1. 位相空間の圏は次の指定によってモデル圏となる。これを $\mathbf{Top}_Q$ と書くことにする。
 - 弱同値を弱ホモトピー同値写像（ホモトピー群の同型を誘導する）
 - ファイブレーションを Serre ファイブレーション
 - コファイブレーションを相対胞複体の包含射のレトラクト
2. 位相空間の圏は次の指定によってモデル圏となる。これを $\mathbf{Top}_S$ と書くことにする。
 - 弱同値をホモトピー同値写像
 - ファイブレーションを Hurewicz ファイブレーション
 - コファイブレーションを閉コファイブレーション
3. 単体的集合の圏は次の指定によってモデル圏となる。これを $\mathbf{Set}_K^{\Delta_{op}}$ と書くことにする。
 - 弱同値を幾何学的実現をとってホモトピー同値写像
 - ファイブレーションを Kan ファイブレーション
 - コファイブレーションを各次元で単射となる射
4. (Bounded) Chain complex の圏は次の指定によってモデル圏となる。これを $\mathbf{Ch}_P$ と書くことにする。
 - 弱同値を擬同型写像（ホモロジー群の同型を誘導する）
 - ファイブレーションを各次元で全射かつ核が射影的
 - コファイブレーションを各次元で単射
5. (Bounded) Chain complex の圏は次の指定によってモデル圏となる。これを $\mathbf{Ch}_I$ と書くことにする。
 - 弱同値を擬同型写像（ホモロジー群の同型を誘導する）
 - ファイブレーションを各次元で全射
 - コファイブレーションを各次元で単射かつ余核が入射的
6. R を準フロベニウス環としたとき、 R -加群の圏は次の指定によってモデル圏となる。これを $\mathbf{Mod}(R)_F$ と書くことにする。
 - 弱同値を安定同値写像
 - ファイブレーションを全射
 - コファイブレーション単射
7. 小圏の圏は次の指定によってモデル圏となる。これを $\mathbf{Cat}_{JT}$ と書くことにする。
 - 弱同値を圏同値
 - ファイブレーションを Grothendieck ファイブレーション

- コファイブレーションを対象間で単射となる射

上記のようにモデル構造とは幾何学的な対象だけでなく、代数や組み合わせ論的な対象の圏においても現れてくる。ホモロジー代数などの理論は上記のモデル構造を考えると非常に簡潔に理解できる。

さて今度は、モデル圏が与えられたとき、それに付随したいくつかのモデル圏を紹介しよう。これらの証明は非常に簡単なので割愛する。

例 0.5. M をモデル圏とする。このとき、

1. M^{op} は以下の指定でモデル圏となる。
 - 弱同値を M の弱同値
 - ファイブレーションを M のコファイブレーション
 - コファイブレーションを M のファイブレーション
2. 対象 $X \in M$ に対し、 $M \downarrow X$ は以下の指定でモデル圏となる。
 - 弱同値を M の弱同値
 - ファイブレーションを M のファイブレーション
 - コファイブレーションを M のコファイブレーション
3. 対象 $X \in M$ に対し、 $X \downarrow M$ は以下の指定でモデル圏となる。
 - 弱同値を M の弱同値
 - ファイブレーションを M のファイブレーション
 - コファイブレーションを M のコファイブレーション

命題 0.6. M をモデル圏とすると、

1. $i : A \rightarrow B$ がコファイブレーションであることと、 i が任意の自明なファイブレーションに対し LLP を持つことは同値である。
2. $i : A \rightarrow B$ が自明なコファイブレーションであることと、 i が任意のファイブレーションに対し LLP を持つことは同値である。
3. $p : X \rightarrow Y$ がファイブレーションであることと、 p が任意の自明なコファイブレーションに対し RLP を持つことは同値である。
4. $p : X \rightarrow Y$ が自明なファイブレーションであることと、 p が任意のコファイブレーションに対し RLP を持つことは同値である。

証明 1 についてのみ示す。他も同様である。モデル圏に関する命題は双対的な命題が付随する場合が多い。

まず、モデル圏の公理により十分条件は満たしている。今、 i は任意の自明なファイブレーションに対し LLP を持つとする。分解公理により、 $i = q \circ j$ と合成の形にかけ、 $q : C \rightarrow B$ は自明なファイブレーション、 $j : A \rightarrow C$ がコファイブレーションである。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & C \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{=} & B \end{array}$$

の可換図式で仮定により、 $h : B \rightarrow C$ が存在し、図式を可換にする。これを少し書き直すと、

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{=} & A & \xrightarrow{=} & A \\ i \downarrow & & j \downarrow & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{h} & C & \xrightarrow{q} & C \end{array}$$

が可換になり、上下列の合成は恒等射である。これは、 i が j のレトラクトであることを意味しているため、 j がコファイブレーションであるため i もコファイブレーションである。□

注意 0.7. 上記の命題によりモデル圏の構造は、 W, F, C のいずれか二つを決めると残り一つも自動的に決まってしまうのである。 W, F から C 、あるいは W, C から F が自動的に定まるのは上記の命題そのままである。では W は分解公理と 2-out-of-3 の公理から自明なファイブレーションと自明なコファイブレーションの合成に分解される。すべての弱同値はそういう形をしているので、 W は $W \cap F$ と $W \cap C$ により決定する。しかし、これらは上記の命題から C と F で決まると言っているのである。

さて名前から察することができるように、コファイブレーションは余極限、ファイブレーションは極限と相性が良い。

命題 0.8. M をモデル圏とすると、

1. $i : A \longrightarrow B$ が (自明な) コファイブレーションならば、任意の射による押し出しもまた (自明な) コファイブレーションである。
2. $p : X \longrightarrow Y$ が (自明な) ファイブレーションならば、任意の射による引き戻しもまた (自明な) ファイブレーションである。

証明 1 のみを示す。示すべきことは i をコファイブレーションをしたとき任意の押し出し図式、

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ B & \longrightarrow & B \cup_A C \end{array}$$

に対し、 j がコファイブレーションであることである。命題 0.6 により、 j が任意の自明なファイブレーションに対し LLP を持てばよい。次の任意の可換図式

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & X \\ j \downarrow & & \downarrow p \\ B \cup_A C & \longrightarrow & Y \end{array}$$

で、 p は自明なファイブレーションとする。上記の 2 つの図式をつなげると、

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & B \cup_A C & \longrightarrow & Y \end{array}$$

となり、 i がコファイブレーションであることから図式を可換にする $h : B \longrightarrow X$ が存在する。押し出しの性質から、 $h \cup f : B \cup_A C \longrightarrow X$ が存在し、

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & X \\ j \downarrow & \nearrow h \cup f & \downarrow p \\ B \cup_A C & \longrightarrow & Y \end{array}$$

を可換にする。□

さて、モデル圏は (余) 極限で閉じているため始対象と終対象を持つ。これらをそれぞれ ϕ と $*$ で表すことにする。

定義 0.9. モデル圏の対象 X に対し、

1. X がコファイブランであるとは、唯一の射 $\phi \longrightarrow X$ がコファイブレーションである。

2. X がファイブランチであるとは、唯一の射 $X \rightarrow *$ がファイブレーションである。

モデル圏の中でこれらの対象はホモトピー論を行う上で「良い」性質を持っている。 $\mathbf{Top}_Q$ でいえば CW 複体であったり、 $\mathbf{Set}_K^{\Delta^{op}}$ でいえば Kan 複体であったり、 $\mathbf{Ch}_P$ でいえば射影的複体、 $\mathbf{Ch}_I$ でいえば入射的複体だったりする。モデル圏の中では、これら良い性質の対象に近似する操作が分解公理によって与えられている。つまり、適当な対象 X に対し、 $\phi \rightarrow X$ を分解すれば、 $\phi \hookrightarrow \tilde{X} \xrightarrow{\sim} X$ でコファイブランチで X を弱同値な対象 $\tilde{X}$ を得る。これがコファイブランチ近似である。双対的にファイブランチ近似もある。これが空間でいうところの胞体近似、代数でいうところの projective(injective) resolution である。

参考文献

- [Qui] D. Quillen. Homotopical algebra. Lecture Notes in Mathematics, No. 43 Springer-Verlag, Berlin-New York 1967 iv+156 pp.
- [Hov] M. Hovey. Model categories. Mathematical Surveys and Monographs, 63. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. xii+209 pp.
- [Hir] P. Hirschhorn. Model categories and their localizations. Mathematical Surveys and Monographs, 99. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xvi+457 pp.
- [DS] W. G. Dwyer and J. Spaliński. Homotopy theories and model categories. In Handbook of algebraic topology , pages 73-126. North-Holland, Amsterdam, 1995.