

0.1 Propariness

Definition 0.1.1

M を model category としたとき、 M が

1. left propar とは、任意の weak equivalence の cobased change along cofibration が weak equivalence になることである。
2. right propar とは、任意の weak equivalence の based change along fibration が weak equivalence になることである。
3. propar とは left かつ right propar

Proposition 0.1.2

M を model category としたとき、

1. cofibrant object 間の weak equivalence の cobased change along cofibration is weak equivalence
2. fibrant object 間の weak equivalence の based change along fibration is weak equivalence

proof) 1 を示す。push out diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{j} & D \end{array}$$

を考え、 f を weak equivalence、 i を cofibration、 A, B を cofibrant とする。よって、 C, D も cofibrant である。このとき、 g が weak equivalence を示したい。よって任意の fibrant object である Z に対し、

$$g^* : \pi(D, Z) \longrightarrow \pi(C, Z)$$

が isomorphism であることを示す。まず、 $\alpha \in \pi(C, Z)$ をとる。

$$f^* : \pi(B, Z) \longrightarrow \pi(A, Z)$$

は isomorphism であるから、 $\alpha \circ i \in \pi(A, Z)$ に対し、 $\beta \in \pi(B, Z)$ が存在し、 $\alpha \circ i \sim \beta \circ f$ である。この homotopy を $H : A \rightarrow \text{Path}(Z)$ とおいたとき、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{H} & \text{Path}(Z) \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p_0 \\ C & \xrightarrow{\alpha} & Z \end{array}$$

の可換図で、 i は cofibration で p_0 は acyclic fibration であるから、 $\tilde{H} : C \rightarrow \text{Path}(Z)$ が存在し、 $p_1 \circ \tilde{H} = \alpha'$ とおくと、 $\alpha \simeq \alpha'$ かつ、 $\alpha' \circ i = \beta \circ f$ となる。つまり、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & C \\ \downarrow f & & \downarrow \alpha' \\ B & \xrightarrow{\beta} & Z \end{array}$$

が可換なのだから、push out の性質から、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & C \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{j} & D \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \alpha' \\ \searrow \gamma \\ \nearrow \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ Z \end{array}$$

を可換にする morphism が存在する。これより、

$$g^*([\gamma]) = [\gamma \circ \gamma] = [\alpha'] = [\alpha]$$

となり全射であることが分かる。

次に、 g^* が単射であることを示す。 $u, u' \in \text{Hom}(D, Z)$ に対し、 $g^*[u] = g^*[u']$ とする。つまり、 $u \circ g \simeq u' \circ g$ in $\text{Hom}(C, Z)$ とする。これより、 $H : C \rightarrow \text{Path}(Z)$ が存在し、 $p_0 \circ H = u \circ g$ 、 $p_1 \circ H \simeq u' \circ g$ となる morphism が存在する。ここで、次

の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{H} & \text{Path}(Z) \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow p_0 \times p_1 \\
 B & \xrightarrow{j} & D & \xrightarrow{u \times u'} & Z \times Z
 \end{array}$$

これを、 $M/Z \times Z$ の diagram と考える。このとき、 $M/Z \times Z$ は total space の model structure そのままで model category となり、 $A \rightarrow Z \times Z$, $B \rightarrow Z \times Z$ はともに cofibrant、 $\text{Path}(Z) \rightarrow Z \times Z$ は fibrant in $M/Z \times Z$ である。よって、 $f : A \rightarrow B$ は $M/Z \times Z$ における weak equivalence でもあるため、

$$f^* : \pi(B, \text{Path}(Z)) \rightarrow \pi(A, \text{Path}(Z))$$

は全単射であるため、 $w \circ f \simeq H \circ i$ となる $w \in \text{Hom}_{M/Z \times Z}(B, \text{Path}(Z))$ が存在する。先と同じ理論で、 i はやはり $M/Z \times Z$ における cofibration であるから、 $H \simeq H'$ で、 $H' \circ i = w \circ f$ となる morphism が存在する。このとき、やはり、push out の性質から

$$G : D \rightarrow \text{Path}(Z)$$

が誘導され、 $p_0 \circ G = u$, $p_1 \circ G = u'$ であることが分かる。

□

Corollary 0.1.3

M を model category としたとき、

1. Every object is cofibrant ならば、 M は left propar である。
2. Every object is fibrant ならば、 M は right propar である。
3. Every object is cofibrant and fibrant ならば、 M は propar である。

Example 0.1.4

$S\text{Set}$ は left propar、 TOP は Quillen structure により right propar、Strom structure により propar $Ch(R)$ は projective structure で right propar、injective structure で left propar である。

大体片方までは簡単に分かるのだが、もう片方を示すのがかなり大変。しかし、これらはきちんと $\text{propar model category}$ である ($\text{Ch}(\mathbf{R})$ は定かでない)。これから、Quillen type の model structure に対し、left propar であることを確かめて見る。

Lemma 0.1.5

$f : X \longrightarrow Y$ を空間の写像としたとき、 $f_* : \pi_0 X \longrightarrow \pi_0 Y$, $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ が全単射、 $f_* : H_*(X; f^*A) \longrightarrow H_*(Y; A)$ が任意の local coefficient system A on Y に対し、全単射となることと、 f が weak equivalence であることは同値。

Proposition 0.1.6

$f : X \longrightarrow Y$ を weak equivalence とし、 $n \geq 0$ に対し、 $\alpha : S^n \longrightarrow X$ を考える。このとき、induce map

$$\tilde{f} : X \cup_{\alpha} D^n \longrightarrow Y \cup_{f \circ \alpha} D^n$$

は weak equivalence である。

proof) $n = 0, 1$ のときは、van Kampen 定理を用いると、 $\tilde{f}$ が iso であることが分かる。あとは、

$$f_* : H_*(X \cup D^n, f^*A) \longrightarrow H_*(Y \cup D^n, A)$$

が同型を示せばよいが、このとき、 D^n を $\{x \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leq |x| \leq 2/3\}$ と $\{x \in \mathbf{R}^n \mid 1/3 \leq |x| \leq 1\}$ に分けて切除定理と完全列から、 f_* が同型であることが分かる。

□

Theorem 0.1.7

TOP は Quillen structure で propar model category となる。

proof) $f : X \longrightarrow Y$ を weak equivalence とし、 $i : X \longrightarrow Z$ を cofibration とし、次の図式の push out を考える。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{j} & W \end{array}$$

このとき、 g が weak equivalence であることを示す。 i は cofibration であるが Quillen type の cofibration は relative cell complex の inclusion である $k : X' \rightarrow Z'$ の retract であった。つまり、

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{s} & X' & \xrightarrow{t} & X \\ i \downarrow & & k \downarrow & & i \downarrow \\ Z & \xrightarrow{u} & Z' & \xrightarrow{v} & Z \end{array}$$

で上下横列は合成して恒等射である。このとき、push out diagram

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{k} & Z' \\ f \circ t \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \longrightarrow & V \end{array}$$

を考えたとき、

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{u} & Z' & \xrightarrow{v} & Z \\ g \downarrow & & h \downarrow & & g \downarrow \\ W & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W \end{array}$$

の図式で下列は push out の性質から定義される morphism で合成して恒等射である。つまり、 g は h の retract であるから、 h が weak equivalence であることを示せばよい。このとき、Prop 0.1.6 により、 h は f に cell を貼り付けて誘導される写像であるため、 f が weak equivalence ならば h もそうである。

□

Corollary 0.1.8

$S\text{Set}$ は