0.1 Reedy category

small category である D と model category である C に対し、fanctor category である C^D が model category かどうかは自然な疑問である。C に関する条件としては例えば、C が位相空間の圏や Simplicial set であれば良いらしい。では small category である D の条件としてはどんなことが考えられるだろうか。

Definition 0.1.1

small category である D が Reedy category であるとは、すべての D の object に非負整数の添え字（degree）が付き、（つまり写像 $\mathrm{ob}(D) \longrightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$ が与えられる）次の条件を満たす D の 2 つの sub category $\overrightarrow{D}$（direct category）と $\overleftarrow{D}$（inverce category）が与えられる。

1. $\mathrm{ob}(\overrightarrow{D}) = \mathrm{ob}(D)$ であり、$\overrightarrow{D}$ の morphism は identity morphism を除き、degree をあげる。つまり、$X \neq Y$ で $\mathrm{Hom}_{\overrightarrow{D}}(X,Y) \neq \phi$ ならば、$\dim(X) < \dim(Y)$
2. $\mathrm{ob}(\overleftarrow{D}) = \mathrm{ob}(D)$ であり、$\overleftarrow{D}$ の morphism は identity morphism を除き、degree を下げる。つまり、$X \neq Y$ で $\mathrm{Hom}_{\overleftarrow{D}}(X,Y) \neq \phi$ ならば、$\dim(X) > \dim(Y)$
3. ${}^{\forall} f \in \mathrm{Mor}(D)$ に対し、$f = \overrightarrow{f} \circ \overleftarrow{f}$ と一意に分解できる。ただし、$\overrightarrow{f} \in \mathrm{Mor}(\overrightarrow{D})$, $\overleftarrow{f} \in \mathrm{Mor}(\overleftarrow{D})$ である。

Remmark 0.1.2

D が Reedy category ならば、D^{op} も $\overrightarrow{D^{op}} = (\overleftarrow{D})^{op}$, $\overleftarrow{D^{op}} = (\overrightarrow{D})^{op}$ とすれば、Reedy category である。

Example 0.1.3

$D = \{a \longleftarrow b \longrightarrow c\}$ は $a \mapsto 0$, $b \mapsto 1$, $c \mapsto 1$ とし、$\mathrm{Mor}(\overrightarrow{D}) = \mathrm{Mor}(D)$, $\mathrm{Mor}(\overleftarrow{D})$ =only identity とすれば Reedy category である。また、Remmark 0.1.2 により $D = \{a \longrightarrow b \longleftarrow c\}$ も Reedy category である。

Example 0.1.4

$D = \{0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots\}$ は $\mathrm{Mor}(\overrightarrow{D}) = \mathrm{Mor}(D)$, $\mathrm{Mor}(\overleftarrow{D})$ =only identity とすれば、Reedy category である。また Remmark 0.1.2 により、$D = \{\cdots \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0\}$ も Reedy category である。

Example 0.1.5

partial orderd category である Δ は $\mathrm{Mor}(\overrightarrow{\Delta}) = \{\mathrm{injection}\}$ と $\mathrm{Mor}(\overleftarrow{\Delta}) = \{\mathrm{surjection}\}$ すればこれは Reedy category である。Remmark 0.1.2 により Δ^{op} も Reedy category である。

Definition 0.1.6

D を Reedy category とし、$a \in \mathrm{ob}(D)$ に対し、

1. D の a に対する lantching category である $\partial(\overrightarrow{D}\downarrow a)$ とは、a の identity morphism を除いた $\overrightarrow{D}\downarrow a$ の full sub category
2. D の a に対する matching category である $\partial(a \downarrow \overleftarrow{D})$ とは、a の identity morphism を除いた $a \downarrow \overleftarrow{D}$ の full sub category

Definition 0.1.7

C を model category とし、D を Reedy category、$a \in \mathrm{ob}(D)$ とする。$X : D \longrightarrow C$ を fanctor としたとき、

1. $X \downarrow a : \partial(\overrightarrow{D}\downarrow a) \longrightarrow C \downarrow X(a)$ が誘導され、$C \downarrow X(a)$ は colimit で閉じているので、$\mathrm{colim}(X \downarrow a) : L_aX \longrightarrow X(a)$ が導かれる。L_aX を X の a に対する latching object と呼び、$\mathrm{colim}(X \downarrow a) : L_aXX \longrightarrow X(a)$ を latching map と呼ぶ。
2. $a \downarrow X : \partial(a \downarrow \overrightarrow{D}) \longrightarrow X(a) \downarrow C$ が誘導され、$X(a) \downarrow C$ は limit で閉じているので、$\lim(a \downarrow X) : X(a) \longrightarrow M_aX$ が導かれる。M_aX を X の a に対する matching object と呼び、$\lim(a \downarrow X) : X(a) \longrightarrow M_aX$ を matching map と呼ぶ。

Remmark 0.1.8

$L_a : C^D \longrightarrow C$, $M_a : C^D \longrightarrow C$ は fanctor である。

Example 0.1.9

$X : D \longrightarrow C$ で $D = \{a \longleftarrow b \longrightarrow c\}$ において、$\overrightarrow{D}\downarrow b = \{\mathrm{identity}\}$ なので、$\partial(\overrightarrow{D}\downarrow b) = \phi$（empty category）より、$L_bX = \phi$(inicial object) である。

また、$\partial(\overrightarrow{D}\downarrow a) = \{b \longrightarrow a\}$ で 1 つの object からなる category であるので、$L_aX = X(a)$ であり、同様に $L_cX = X(c)$ である。

Definition 0.1.10

C を model category とし、D を Reedy category とする。$f \in \mathrm{Hom}_{C^D}(X,Y)$ が、

1. Reedy weak equivalence とは $^\forall a \in D$ に対し、$f_a : X(a) \longrightarrow Y(a)$ が C での weak equivalence
2. Reedy cofibration とは $^\forall a \in D$ に対し、push out から導かれる morphism $X(a)\coprod_{L_aX} L_aY \longrightarrow Y(a)$ が C における cofibration
3. Reedy fibration とは $^\forall a \in D$ に対し、pull back から導かれる morphism $X(a) \longrightarrow Y(a) \times_{M_aY} M_aX$ が C における fibration

と定義する。

Theorem 0.1.11

C を model category とし、D を Reedy category としたとき、C^D の morphism で Reedy weak equivalence、Reedy cofibration、Reedy fibration をそれぞれ weak equivalence、cofibration、fibration として選べば C^D は model category となる。

Example 0.1.12

C を model category とし、$D = \{a \longleftarrow a \longrightarrow c\}$ としたとき、$f \in \mathrm{Hom}_{C^D}(X,Y)$ が Reedy weak equivalence、fibration とは f_a, f_b, f_c が C での weak equivalence、fibration である。また、f が Reedy cofibration とは、Example **??**を考えれば、f_b が cofibration、$X(a)\coprod_{X(b)} Y(b) \longrightarrow Y(a)$, $X(c)\coprod_{X(b)} Y(b) \longrightarrow Y(c)$ が cofibration になるという訳で、以前の C^D の model 構造と一致する。pull back diagram に対しても同様である。

Example 0.1.13

$X : D \longrightarrow \mathbf{TOP}$ で $D = \{0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots\}$ で、各 $X(n) \longrightarrow X(n+1)$ は inclusion とする。つまり sequential sistem とする。

$$\partial(\overrightarrow{D} \downarrow n) = \{0 \longrightarrow n\ ,\ 1 \longrightarrow n\ ,\ \cdots\ , n-1 \longrightarrow n\}$$

であるので、$L_nX = X(n-1)$ となる。ただし、$L_0X = \phi$ である。このとき、sequential system 間の morphism$f : X \longrightarrow Y$ に対し、f が Reedy weak equivalence、Reedy fibration とは、各 $f_n : X(n) \longrightarrow Y(n)$ が $\mathbf{TOP}$ の weak equivalence、fibration で、

f が Reedy cofibration とは、$X(n)\coprod_{X(n-1)}Y(n-1)\longrightarrow Y(n)$ が **TOP** における cofibration となることである。これより、C^D の cofibrant object とは、各 $Y(n-1)\longrightarrow Y(n)$ が cofibration で $Y(0)$ が cofibrant object なことである。

さて、以上のことより、$\mathrm{colim}: C^D\longrightarrow C$ が cofibrant object 間の weak equivalence を weak equivalence に移すことは分かっているので、**TOP** を Strom の構造で考えれば任意の空間は cofibrant なので、sequencial colimit である $X(0)\subset X(1)\subset X(2)\subset\cdots$ が cofibrant とは、各 inclusion が closed cofibration であれば良い。よって 2 つの sequencial colimitX,Y で各 inclusion が closed cofibration であれば、morphism$f: X\longrightarrow Y$ で各 $f_n: X(n)\longrightarrow Y(n)$ が homotopy equivalence なものに対し、$\mathrm{colim}f:\mathrm{colim}X\longrightarrow\mathrm{colim}Y$ も homotopy equivalence となる。