0.1　代数学の基本定理

とりあえず、一点コンパクト化というのをおさらい。

Proposition 0.1.1

compact Hausdorff 空間 X に対し、X から一点をのぞいた空間 $X - \{x\}$ は局所 compact Hausdorff 空間である。

という命題の逆を考えて一点を加え、局所 compact Hausdorff から compact Hausdorff を構成する方法を考えます。

Definition 0.1.2

Hausdorff 空間 X と、X に属さない点 x_∞ に対し、$\widetilde{X} = X \cup \{x_\infty\}$ に次のように定義する。

$$O(\widetilde{X}) = O(X) \cup \{V \cup \{x_\infty\} \mid V = X - K\ ,\ K : \text{compact in } X\}$$

この $\widetilde{X}$ を X の一点コンパクト化と呼ぶ。

Theorem 0.1.3　（*Alexsandroff*）

Locally compact Hausdorff 空間 X に対し、その一点コンパクト化は compact Hausdorff 空間である。

Proposition 0.1.4

$\mathbf{R}^n$ の一点コンパクト化は S^n と同相である。とくに $\mathbf{C}$ の一点コンパクト化は S^2 と同相である。

Lemma 0.1.5

X, Y を Hausdorff 空間とし、連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$\tilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$$

が自然と誘導されるが、これが連続である必要十分条件は、X, Y がともに局所 compact Hausdorff で、任意の Y の compact 部分集合 K に対し、$f^{-1}(K)$ が X の compact 集合となることである。

Lemma 0.1.6

連続写像 $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ に対し、$\tilde{f} : S^2 \longrightarrow S^2$ が連続写像となる必要十分条件は、$z \in \mathbf{C}$ に対し、

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$$

となることである。

Lemma 0.1.7

$\rho_n : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ を、$\rho_n(z) = z^n$ で定義すると、これは、連続写像 $\tilde{\rho} : S^2 \longrightarrow S^2$ を誘導する

Proposition 0.1.8

$\rho_n : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ に対し、$\tilde{\rho} : S^2 \longrightarrow S^2$ において $\deg \tilde{\rho_n} = n$ である。

proof)　　$|z| = 1$ である $z \in \mathbf{C}$ に対し、

$$|\rho(z)| = |z^n| = |z|^n = 1$$

$\sigma_n = \rho_{|_{S^1}} : S^1 \longrightarrow S^1$ が制限写像として定義される。$[\sigma_n] \in \pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ であるが、これが $\mathbf{Z}$ においては n に対応するのがわかる。Hurewiz の定理を用いてホモロジー群との関係を考えれば、$\deg \sigma_n = n$ となることもわかる。また、$|z| > 1$ を満たす $z \in \mathbf{C}$ に対し、$|\rho_n(z)| = |z|^n > 1$ であり、逆も成り立つので $\mathbf{C} \cup \{x_\infty\} \cong S^2$ で S^1 を S^1 移すような同型で考えれる。B^2_+, B^2_- をそれぞれ S^2 の北半分、南半分とすれば、

$$\tilde{\rho_n}(B^2_+) = B^2_+ \ , \ \tilde{\rho_n}(B^2_-) = B^2_-$$

と考えてよい。

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_2(S^2) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\tilde{\rho_n}_*"'] & H_2(S^2, B^2_-) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\tilde{\rho_n}_*"'] & H_2(B^2_+, S^1) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\rho_{n*}"'] & \widetilde{H}_1(S^1) \arrow[d, "\sigma_{n*}"] \\
\widetilde{H}_2(S^2) \arrow[r, "\cong"] & H_2(S^2, B^2_-) \arrow[r, "\cong"] & H_2(B^2_+, S^1) \arrow[r, "\cong"] & \widetilde{H}_1(S^1)
\end{tikzcd}$$

が可換になるため、$\deg \sigma_n = n$ により、$\deg \tilde{\rho_n} = n$ である。

$\square$

Lemma 0.1.9

$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ を、

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

と定義すると、これは連続写像 $\tilde{f} : S^2 \longrightarrow S^2$ を誘導する。

Lemma 0.1.10

$n > 1$ に対し $f : X \longrightarrow S^n$ が全射でなければ、f は定置写像と homotopic である。

proof)　f は全射でないので、

$$^{\exists}x \in S^n \qquad s.t \qquad f(X) \subset S^n - \{x\} \cong \mathbf{R}^n$$

で $\mathbf{R}^n$ が可縮なので f が定置写像と homotopic になる。

□

Theorem 0.1.11

$n > 1$ において、n 次代数複素方程式、

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

は少なくとも一つの解を持つ。

proof)　$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ を、

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

で定義する。今 $f(z) = 0$ となる z が存在しないとして矛盾を導く。$\rho_n : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ を、$\rho_n(z) = z^n$ で定義する。

$$H : \mathbf{C} \times I \longrightarrow \mathbf{C}$$

を、$H(z,t) = z^n + (1-t)(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)$ で定義すれば、これは f と ρ_n をつなぐ homotopy である。また、これは

$$\widetilde{H} : S^2 \times I \longrightarrow S^2$$

を誘導し、$\tilde{f}$と$\tilde{\rho_n}$ をつなぐ homotopy となる。

$$\deg \tilde{f} = \deg \tilde{\rho_n} = n$$

今仮定より f は全射ではないので、$\tilde{f}$ も全射ではない。Lemma 0.1.10 より、$\tilde{f}$ は定置写像と homotopic である。よって、$\deg \tilde{f} = 0$ だが、これは $\deg \tilde{f} = n > 1$ に矛盾する。

$\square$