

離散モース理論

離散モース理論とは Robin Forman が [1] で導入した組み合わせ論的なモース理論である。モース理論が多様体上の滑らかな関数を用いて、元の多様体の情報を調べるのに対し、離散モース理論は CW 複体の胞体の集合上の関数を用いて、元の複体の情報を読み取る。オリジナルのモース理論において、ミルナーがモース関数の臨界点と多様体の胞体構造について次の結果を残している。

定理 0.1. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな閉多様体上のモース関数とする。このとき、 $M \simeq \bigcup_{p \in C(f)} e_p^{\lambda(p)}$ となる CW 複体が存在する。ただし、 $C(f)$ は f の臨界点の集合、 $\lambda(p)$ は p の指数である。

Forman は、この定理の離散モース版を考えた。

定理 0.2. X は正則な CW 複体とし、 $f : F(X) \rightarrow \mathbb{R}$ を離散モース関数とする。このとき、 $X \simeq \bigcup_{\sigma \in C(f)} \sigma$ となる CW 複体が存在する。ただし、 $C(f)$ は f の臨界胞体の集合である。

Forman の定理は結局のところ何を言っているのかというと、離散モース関数により余分な胞体をつぶし、ホモトピー型を変えずに臨界胞体の数だけからなる小さな胞複体を構成できることを意味している。

1 CW 複体

まず離散モース理論の定義域となる正則な複体について。Forman の [1] では、正則な胞体を個々で考えているがすべて正則を仮定したほうが話が早い。以下、 X は有限の CW 複体とし、 $\sigma^{(p)}$ はその p -次元胞体とする。

定義 1.1. X の p -次元胞体 $\sigma^{(p)}$ が正則であるとは、その特性写像 $D^p \rightarrow X$ が境界も含めて中への同相であることをいう。すべての胞体が正則である時、CW 複体は正則であるという。

定義 1.2. $F(X)$ を X の胞体からなる集合とする。

$$\sigma \leq \tau \iff \sigma \subset \bar{\tau}$$

により、これは半順序集合となる。これを X の面順序集合と呼ぶ。

正則な CW 複体においては、この面順序集合が本質的な情報をもっている。次は有名な事実で、面順序集合から元の複体を再構成できることを意味している。

事実 1.3. X を正則な CW 複体としたとき、その面順序集合の分類空間 (順序複体) $BF(X)$ は X と同相である。

次の補題は単体複体で考えると非常に安易である。 $(p+1)$ -単体 $\tau = [a_0, a_1, \dots, a_{p+1}]$ を考えたとき、 $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)} > v^{(p-1)}$ という包含関係を考える。これはつまり、 a_i, a_j が存在し、

$$\sigma = [a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{p+1}]$$

$$v = [a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{p+1}]$$

と表せる。このとき、

$$s = [a_0, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{p+1}]$$

を考えると、 $\sigma \neq s$ であるが、 $\tau > s > v$ である。

補題 1.4. X を正則な CW 複体とし、 $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)} > v^{(p-1)}$ という包含関係を考える。このとき、 $s^{(p)} \neq \sigma$ が存在し、 $\tau > s > v$ を満たす。

証明. X の胞体の向きを選ぶ。

$$\partial\tau = \pm\sigma + \sum_{s \neq \sigma} a_s s, \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

と表せる。さらに、

$$0 = \partial\partial\tau = \pm v + \sum_{u \neq v} c_u u + \sum_{s \neq \sigma} a_s \partial s$$

よって、 $\tau > s \neq \sigma$ が存在し、

$$\partial s = cv + \sum_{u \neq v, \dim(u)=p-1} c'_u u$$

の形になるはずである。ただし、 $c \neq 0$ である。よって、 $s > v$ となる。 $\square$

補題 1.5. X を正則な CW 複体とし、 $\tau^{(p+r)} > v^{(p-1)}$ という包含関係を考える。ただし、 $p, r \leq 1$ とする。このとき、 $\sigma^{(p+r-1)} \neq s^{(p+r-1)}$ が存在し、 $\tau > \sigma > v$, $\tau > s > v$ を満たす。

証明. r に関する帰納法で示す。 $r = 1$ のとき、 X は正則であるから

$$\partial\tau^{(p+1)} = \partial_{\sigma^{(p)} < \tau} \bar{\sigma}$$

とあらわせる。よって、 $\sigma > v$ となる p -単体が存在する。補題 1.4 により、 $\tau > s > v$ となる s も存在する。一般の r で考える。やはり、

$$\partial\tau^{(p+r)} = \partial_{\sigma^{(p+r-1)} < \tau} \bar{\sigma}$$

であるので、 $\tau > \sigma > v$ となる $\sigma^{(p+r-1)}$ が存在する。これを続けると、 $\tau > \sigma > u^{(p+r-2)} > v$ が見つかる。帰納法の仮定を用いると、 $w^{p+r-2} \neq u$ が存在し、 $\sigma > w > v$ となる。補題 1.4 を $\tau > \sigma > w$ に適用すると、 $s^{(p+r-1)} \neq \sigma$ で、 $\tau > s > w > v$ がみつかる。 $\square$

正則な CW 複体におけるレトラクション（ホモトピー同値）の特殊な場合を考える。これは単純ホモトピー同値などと呼ばれたりする。

定義 1.6. X を正則な CW 複体とし、その胞体 $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)}$ を考える。 σ が τ の自由な面であるとは、 σ が τ 以外の面ではないことをいう。このとき、 $Y = X - (\tau \cup \sigma)$ とおく。

$$(\tau \cup \sigma) \longrightarrow (\partial\tau - \sigma)$$

のレトラクションは $X \longrightarrow Y$ のレトラクションを導く。これはホモトピー同値であり、 $X \searrow Y$ とかく。

2 離散モース理論

さて、離散モース関数は空間 X ではなく、集合 $F(X)$ からの関数である。よって連続性は加味されない。ただ、 $\mathbb{R}$ にも大小関係の順序があるため、この順序をある程度保つというのが離散モース関数である。

定義 2.1. 写像 $f : F(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ が離散モース関数とは、任意の $\sigma^{(p)} \in F(X)$ に対し、次の 2 つの条件を満たす。

1. $\#\{\tau^{(p+1)} > \sigma | f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1$
2. $\#\{v^{(p-1)} < \sigma | f(v) \geq f(\sigma)\} \leq 1$

このとき、次の条件を満たす胞体を臨界胞体とよぶ。

$$\#\{\tau^{(p+1)} > \sigma | f(\tau) \leq f(\sigma)\} = \#\{v^{(p-1)} < \sigma | f(v) \geq f(\sigma)\} = 0$$

これは何を言っているのかというと、面の順序と f の値の大小がひっくり返っている対が 1 つまでなら許すということである。すべての順序を保っているのが臨界胞体である。たとえば、 $F(X) \rightarrow \mathbb{R}$ が順序を保つ写像ならば、それは離散モース関数ですべてが臨界胞体となる。あまり面白くないが。

例 2.2. 次元を対応させる関数 $\dim : F(X) \rightarrow \mathbb{R}$ は順序を保つ写像なので、離散モース関数であり、すべて臨界胞体である。

離散モース関数の定義から、 $\sigma^{(p)} \in F(X)$ が非臨界胞体であることは、次のどちらかの条件が成り立つことである。

1. $\tau^{(p+1)} > \sigma$ が存在し、 $f(\tau) \leq f(\sigma)$ を満たす。
2. $v^{(p-1)} < \sigma$ が存在し、 $f(v) \geq f(\sigma)$ を満たす。

補題 2.3. 上記の 2 条件は同時には起こりえない。

証明. もし、 $\sigma^{(p)}$ が 2 つの同時に満たしたとする。よって、 $\tau^{(p+1)} > \sigma > v^{(p-1)}$ で、 $f(\tau) \leq f(\sigma) \leq f(v)$ となる胞体が存在する。補題??により、 $\tau > s^{(p)} > v$ で、 $s \neq \sigma$ という胞体が存在する。離散モース関数の定義から、順序がひっくり返るのは一対だけなので、

$$f(s) < f(\tau) \leq f(\sigma) \leq f(v) < f(s)$$

となり矛盾である。 □

補題 2.4. $\sigma^{(p)} \in F(X)$ において、 $t > \sigma$ とする。このとき、 $(p+1)$ -次元胞体、 $\tau^{(p+1)}$ が存在し、 $t \geq \tau > \sigma$ かつ、 $f(t) \geq f(\tau)$ を満たす。

証明. もし、 $\dim t = p+1$ なら、 $\tau = t$ である。よって、 $\dim t = p+r$, $r > 1$ とおく。補題 1.5 により、少なくとも 2 つの $p+r-1$ 胞体 v_1, v_2 が存在し、

$$t > v_1 > \sigma, t > v_2 > \sigma$$

を満たす。離散モース関数の定義から、どちらかは $f(t) > f(v_i)$ を満たす。以下、1 次元ずつ次元を下げていけばよい。 □

3 主定理

滑らかなモース理論でも重要だったのが、モース関数で $a \in \mathbb{R}$ 以下の値をとる部分空間 $M(a)$ である。

定義 3.1. $f : F(X) \rightarrow \mathbb{R}$ を離散モース関数とし、 $a \in \mathbb{R}$ とする。このとき、

$$X(a) = \bigcup_{f(\tau) \leq a, \tau \in F(X)} \bigcup_{\sigma < \tau} \sigma$$

と定義する。

定理 3.2. $a < b$ に対し、 $(a, b]$ に臨界値がなければ、 $M(b) \searrow M(a)$ である。

証明. まず f は単射と仮定しても一般性を失わないことに注意する。これは、

1. $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)}$, $f(\tau) = f(\sigma)$ に対しては、十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し、 $f(\sigma)$ を $f(\sigma) + \varepsilon$ 、あるいは $f(\tau)$ を $f(\tau) - \varepsilon$ と置き変える。
2. $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)} > v^{(p-1)}$, $f(\tau) \neq f(\sigma) \neq f(v)$ に対しては、十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し、 $f(\sigma)$ を $f(\sigma) \pm \varepsilon$ と置き変える。

という操作を臨界胞体を変えずに行えるので、これらの操作を組み合わせて f をわずかに変形させて単射としても $M(a)$ と $M(b)$ を変えずに議論ができるためである。まず、 $f^{-1}(a, b] = \phi$ のとき、 $M(b) = M(a)$ なのでこれ以上示すことはない。よって、 $f(\sigma) \in (a, b]$ となる非臨界胞体 $\sigma^{(p)}$ が存在する場合を考えるが、これがただ一つしかないとしても一般性を失わない。これは、 $(a, b] = \cup(a_i, b_i]$ という分割で、各区間に一つしか非臨界胞体を含まないようにすれば帰納的に示されるからである。非臨界胞体の定義から、次のどちらかを満たす。

1. $\tau^{(p+1)} > \sigma$ が存在し、 $f(\tau) \leq f(\sigma)$ を満たす。
2. $v^{(p-1)} < \sigma$ が存在し、 $f(v) \geq f(\sigma)$ を満たす。

まず、1 の場合を考える。 $(a, b]$ に値をとる胞体は σ だけなので、 $f(\tau) \leq a$ であり、 $\tau \subset M(a)$ 。これより、 $\sigma \subset M(a)$ となり、 $M(a) = M(b)$ となる。この場合は示された。

次に2の場合である。補題 2.3 により、1 を同時に満たすことはないので、任意の $\tau^{(p+1)} > \sigma$ に対し、 $f(\tau) > f(\sigma)$ である。 $f(\tau) \notin (a, b]$ であるため、 $f(\tau) > b$ である。補題 2.4 により、任意の次元の胞体 $\tau > \sigma$ において、 $f(\tau) > b$ となる。このことから、 $\sigma \cap M(a) = \phi$ であることがわかる。よって $M(b)$ は $M(a)$ と σ 、そしてその面の和集合であることがわかる。さて、 σ の面にどのようなものがあるか考える。一つは $v^{(p-1)} < \sigma$ である。仮定より $f(v) > b$ である。任意の $\sigma \neq s^{(p)} > v$ となる胞体 s を考える。非臨界胞体の定義から $f(s) > f(v) > b$ となり、 $v \cap M(a) = \phi$ である。残りの面 $v \neq u^{(p-1)} < \sigma$ を考えてみよう。 $f(u) < f(\sigma)$ であることから、 $f(u) < a$ なので、 $u \subset M(a)$ 。以上のことから、

$$M(b) = M(a) \cup \sigma \cup v$$

であることがわかり、 v は σ の自由な面である。よって、 $M(b) \searrow M(a)$ が示せた。 $\square$

定理 3.3. 臨界胞体 $\sigma^{(p)}$ は、 $f(\sigma) \in (a, b]$ を満たすとし、それ以外の臨界値は含まないものとする。このとき、

$$M(b) \simeq M(a) \bigcup_{\partial e^p} e^p$$

である。

証明. 定理 3.2 と同様に、 f は単射と仮定してよい。よって、 $\{\sigma\} = f^{-1}(a', b']$ となる $a < a' < b' < b$ をとる。定理 3.2 により、 $M(b) \searrow M(b')$, $M(a') \searrow M(a)$ なので、 $M(b') \simeq M(a') \bigcup_{\partial e^p} e^p$ を示せばよい。 σ は臨界胞体なので、 $\tau^{(p+1)} > \sigma$ に対し、 $f(\tau) > f(\sigma)$ となる。すなわち、 $f(\tau) > b'$ である。補題 2.4 により、任意の次元の $\tau > \sigma$ において、 $f(\tau) > b$ となる。よって、 $\sigma \cap M(a') = \phi$ である。一方、 σ の面 $v^{(p-1)} < \sigma$ を考えると、 σ が臨界胞体なので、

$$f(v) \leq f(\sigma)$$

となり、 $f(v) \leq a'$ である。よって、 $v \subset M(a')$ 。これより、 $\partial \sigma \subset M(a')$ であるから、

$$M(b') \simeq M(a') \bigcup_{\partial \sigma} \sigma$$

であり、題意が示された。 $\square$

系 3.4. $X \simeq \bigcup_{p \in C(f)} e_p^{\lambda(p)}$ となる CW 複体が存在する。

参考文献

[1] Robin Forman, Morse theory for cell complexes, Advances in Mathematics 134, 90-145 (1998).