Čech 複体

空間を覆う開被覆からは自然にその共通部分と包含写像により単体的空間（simplicial space）が構成される。これを Čech nerve, そしてその幾何学的実現を Čech 複体（Čech complex）とよぶ。ここでは、この Čeck 複体が元の空間と弱ホモトとピー同値であることを示す。

Definition 0.1. X を位相空間とし、$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆とする。単体的空間 $\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})$ を次で定義する。

$$\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})_n = \coprod_{\lambda_i\in\Lambda} U_{\lambda_0}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}$$

また、$d_j : \bigcap_{0\leqq i\leqq n} U_{\lambda_i} \longrightarrow \bigcap_{0\leqq i\neq j\leqq n} U_{\lambda_i}$ は包含写像、

$$s_i : \bigcap_{0\leqq i\leqq n} U_{\lambda_i} \longrightarrow U_{\lambda_1}\cap\cdots\cap U_{\lambda_i}\cap U_{\lambda_i}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}$$

は恒等射である。これを Čech nerve とよぶ。

Definition 0.2. X_* を $X_n = X$ で恒等写像を face と degeneracy にもつ自明な単体的空間とする。単体的写像 $p_* : \check{\mathrm{C}}(\mathcal{U}) \longrightarrow X_*$ を、$p_n(x) = x$, $x\in\bigcap U_{\lambda_i}$ により定義する。ここから誘導される写像、$p : |\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})| \longrightarrow |X_*| = X$ を考える。

目標は p が弱ホモトピー同値写像を示すことである。

Proposition 0.3. $f : X \longrightarrow Y$ を連続写像とする。$Y = U\cup V$ を開被覆としたとき、次の 3 つの f の制限

$$f^{-1}(U) \longrightarrow U,\ f^{-1}(V) \longrightarrow V,\ f^{-1}(U\cap V) \longrightarrow U\cap V$$

が弱ホモトピー同値ならば、$f : X \longrightarrow Y$ も弱ホモトピー同値である。

Proof. この命題の証明は割愛する。詳しくは P. May の「Weak equivalences and quasi fibrations」などを見るとよい。証明は厄介だが、ホモトピー論では非常に有用な命題である。 □

上記の一般化として次の補題が成り立つ。

Lemma 0.4. $f : X \longrightarrow Y$ を連続写像とする。$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を Y の開被覆とする。任意の添え字の有限集合 $\sigma = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ に対し、$U_\sigma = \bigcap_{1 \leqq i \leqq n} U_{\lambda_i}$ とおいたとき、f の制限

$$f^{-1}(U_\sigma) \longrightarrow U_\sigma$$

が弱ホモトピー同値ならば、$f : X \longrightarrow Y$ もそうである。

Proof. $\mathcal{U}$ が有限個の開被覆ならば、帰納的に Proposition 0.3 により導かれそうだが、無限の場合は少し面倒である。まず、

$$C = \left\{ V = \bigcup U_\lambda \mid f^{-1}(V) \longrightarrow V,\ f^{-1}(U_\sigma \cap U) \longrightarrow U_\sigma\text{: 弱ホモトピー同値}, {}^\forall \sigma \right\}$$

という Y の開集合の集合を定義する。これは包含関係によって順序集合である。この全順序部分集合 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を取ろう。つまり、包含写像の列である。ホモトピー群と sequencial colimit の可換性から、

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \left(\mathrm{colim}_\alpha (f^{-1}(V_\alpha))\right) & \longrightarrow & \pi_* \left(\mathrm{colim}_\alpha (V_\alpha)\right) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathrm{colim}_\alpha \pi_*(f^{-1}(V_\alpha)) & \xrightarrow[\cong]{} & \mathrm{colim}_\alpha \pi_*(V_\alpha) \end{array}$$

の可換図において、上横列以外が同型であることがわかる。よって、f の制限

$$\mathrm{colim}_\alpha f^{-1}(V_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow \mathrm{colim}_\alpha V_\alpha = \bigcup V_\alpha$$

は弱ホモトピー同値である。同様に、

$$f^{-1}(U_\sigma \cap \mathrm{colim}_\alpha V_\alpha) \longrightarrow U_\sigma \cap \mathrm{colim}_\alpha V_\alpha$$

も弱ホモトピー同値であることが示せる。よって、$\mathrm{colim}_\alpha V_\alpha = \bigcup_\alpha V_\alpha$ は $\{V_\alpha\}$ の極大元であり、C に属することがわかる。Zorn の補題により、C の極大元 W が存在する。$W = Y$ であることを示そう。今、$W \neq Y$ であるとすると、$x \in Y - W$ を含むような $\mathcal{U}$ の開集合、$x \in U_\lambda$ が存在する。$W \cup U_\lambda$ を考えると、Proposition 0.3 により、これが C に属することがわかる。これは W の極大性に矛盾し、$W = Y$ である。これより、$f : f^{-1}(Y) = X \longrightarrow Y$ が弱ホモトピー同値であることが示された。 □

Lemma 0.5. X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し、$U_\lambda = X$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在するとき、$p : |\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})| \longrightarrow X$ は *deformation retraction* である。

Proof. $i : X \longrightarrow |\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})|$ を、$X \cong U_\lambda \times \Delta^0 \longrightarrow |\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})|$ の合成により定義する。明らかに $p \circ i = 1$ である。今、$i \circ p \simeq 1_{|\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})|}$ であることを示そう。ホモトピー

$$H : |\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})| \times I \longrightarrow |\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})|$$

を以下のように定義する。$(x, t_0, \cdots, t_n) \in U_\sigma \times \Delta^n$ に対し、

$$H(x, t_0, \cdots, t_n, s) = (x, st_0, \cdots, st_n, 1 - s) \in U_{\sigma \cup \{\lambda\}} \times \Delta^{n+1}$$

これが実現上の写像を誘導することは容易に確かめられる。また、

$$H[x, t_0, \cdots, t_n, 0] = [x, 0, 0, \cdots, 0, 1] = [(d_0)^n x, 1] = [x, 1] \in U_\lambda \times \Delta^0$$

であるため、$H_0 = i \circ p$ であり、

$$H[x, t_0, \cdots, t_n, 1] = [x, t_0, \cdots, t_n, 0] = [d_n x, t_0, \cdots, t_n] = [x, t_0, \cdots, t_n] \in U_\sigma \times \Delta^n$$

なので、$H_1 = 1_{\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})}$ である。 □

Theorem 0.6. $p : |\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})| \longrightarrow X$ は弱ホモトピー同値写像である。

Proof. Lemma 0.4 を適用するため、X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ に対し、p の制限

$$p^{-1}(U_\sigma) \longrightarrow U_\sigma$$

を考える。このとき、$p^{-1}(U_\sigma)$ を詳しく見ると、単体写像の場合では、$p_n^{-1}(U_\sigma) = \check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})_n \cap U_\sigma$ であるので、$p^{-1}(U_\sigma) \cong |\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U}_\sigma)|$ となる。ただし、$\mathcal{U}_\sigma = \{U_\lambda \cap U_\sigma\}_{\lambda \in \Lambda}$ という U_σ の開被覆である。よって、

$$p : |\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U}_\sigma)| \longrightarrow U_\sigma$$

を考えるが、このとき $U_\sigma \in \mathcal{U}_\sigma$ であるため、Lemma 0.5 によりこれはホモトピー同値である。これより、Lemma 0.4 を用いて題位が示せる。 □