1 Banach algebras

この章では関数解析の基本となる Banach space、そして Banach algebra の基本的性質について見ていく。Banach space も Hilbert space も位相的情報と代数構造を両立するものである。そこでは通常の位相空間で行ってきた連続性などの議論が代数的な言葉で示せることが多い。例えば Banach space の間の線形写像が連続であることと、一様連続であることは同値だし、それは線形写像の有界性で言い換えることができる。

Definition 1.1. V を $\mathbb{C}$ 上の vector space としたとき、V の norm とは $||-|| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ で以下を満たすものである。

1. $||x|| \geqq 0$ であり、$||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ for $\lambda \in \mathbb{C}$
3. $||x + y|| \leqq ||x|| + ||y||$

V は $d(x, y) = ||x - y||$ を距離関数として、距離空間となる。このとき、V が完備空間となれば V を Banach 空間という。

Definition 1.2. $A : B \longrightarrow B'$ を Banach（norm）空間の間の線形写像とする。このとき、A が bounded operator とは

$$||A|| := \sup\{||Ax|| \mid x \in B, ||x|| = 1\} < \infty$$

を満たすものである。$||A||$ を A の operator norm という。

Lemma 1.3. $||Ax|| \leqq ||A|| \cdot ||x||$

Proof. $||Ax|| = ||A(x/||x||)|| \cdot ||x|| \leqq ||A|| \cdot ||x||$ □

Lemma 1.4. $||-|| : B \longrightarrow \mathbb{R}$ は bounded である。

Proof. $\sup_{||x||=1}\{||x||\} = 1$ □

Remark 1.5. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||x_n|| = 0$

Remark 1.6. A が bounded であることと、$M > 0$ が存在し、任意の $x \in B$ に対し、

$$||Ax|| \leqq M||x||$$

となることは同値である（M は x に依存しない）。なぜなら、A が bounded なら、$M = ||A||$ とすればよく、逆にそのような M が存在したら、

$$||A|| = \sup\{||Ax|| \mid x \in B, ||x|| = 1\} \leqq M < \infty$$

である。

Proposition 1.7. Banach 空間の線形写像 $T : B \longrightarrow B'$ に対し、次は同値。

1. T は bounded
2. T は一様連続

3. T は連続

ただし、Banaha 空間はその norm から定まる位相（strong topology）を考えている。

Proof. 1) $\Longrightarrow$ 2) を示す。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$d(Ax, Ay) < \varepsilon$ とする。$||Ax-Ay|| = ||A(x-y)|| < \varepsilon$ なのだが、

$$\delta = \varepsilon/||A||$$

とおけば、$d(x, y) = ||x-y|| < \delta$ ならば、$d(Ax, Ay) < \varepsilon$ である。この δ は A と ε にのみ依存するため一様連続である。

2) $\Longrightarrow$ 3) は明らかなので、3) $\Longrightarrow$ 1) を示す。対偶を示す。今、A は bounded でないとする。すると、1.6 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、$x_n \in B$ が存在し、$||Ax_n|| > n||x_n||$ を満たす。ここで、

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x_n}{||x_n||}$$

とおくと、$||y_n|| \to 0$ なので、$y_n \to 0$ $(n \to \infty)$ である。しかし、

$$||Ay_n|| = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{||Ax_n||}{||x_n||} > \sqrt{n}$$

であるため、$||Ay_n|| \to \infty$ $(n \to \infty)$ なので、$\lim_{n\to\infty} Ay_n \neq 0$ である。これより、A は不連続。 □

このProposition が指し示すのは、Banaha 空間をその norm で位相を考えると連続も一様連続も同値だと主張している。これはこの位相が強力で通常の位相空間の感覚で扱うためには、もう少し弱い位相を考えることもある。

Definition 1.8. B が Banach 空間で、B が $\mathbb{C}$-algebra のとき、

$$||xy|| \leqq ||x|| \cdot ||y||$$

を満たすとき、B を Banach algebra と呼ぶ。

Example 1.9. K を nonempty compact Hausdorff 空間とする。$C(K) = \mathrm{Map}(K, \mathbb{C})$ は sup-norm により Banach algebra である。

Proof. まず、

$$||fg|| = \sup\{|f(x)g(x)|\} \leqq \sup\{|f(x)|\} \cdot \sup\{|g(x)|\} = ||f|| \cdot ||g||$$

であるので、完備性だけチェックすればよい。$\{f_n\}$ を $C(K)$ におけるコーシー列とする。このとき、任意の $x \in K$ に対し、

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqq \sup\{|f_m - f_n|\} = ||f_m - f_n||$$

なので、$\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{C}$ のコーシー列である。これより、$f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ という収束先が存在する。$f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ が $x \mapsto f(x)$ により定義され、K が compact Hausdorff であることから f の連続性が示され、$f_n \mapsto f$ $(0 \to \infty)$ であることもわかる。 □

Example 1.10. B お Banach space としたとき、$\mathcal{B}(B)$ を B 上の bounded operator からなる集合とする。このとき、合成を積、operator norm を norm として、Banach algebra となる。

Proof. $\{T_n\}$ を $\mathcal{B}(B)$ におけるコーシー列とすると、任意の $x \in B$ において、

$$||T_n(x) - T_m(x)|| = ||(T_n - T_m)(x)|| \leqq ||T_n - T_m|| \cdot ||x||$$

なので、$\{T_n(x)\}$ は B のコーシー列である。これより、$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ が定まり、$\lim_{n\to\infty} T_n = T$ である。このことより、十分大きな n において、$||T(x) - T_n(x)|| < 1$ となる。つまり、

$$||T(x)|| = ||(T(x) - T_n(x)) + T_n(x)|| < ||T_n(x)|| + 1$$

であるから、

$$\sup_{||x||=1}\{||T(x)||\} \leqq \sup_{||x||=1}\{||T_n(x)|| + 1\} = ||T_n|| + 1$$

□

Corollary 1.11. A を Banach algebra、B を Banach space とする。$\mathrm{Hom}(B, A)$ を bounded operator のなす集合とし、Example 1.9 と同様の積構造、operator norm で norm を考えると、これは Banach algera である。特に、$\mathrm{Hom}(B, \mathbb{C}) = B^*$ とかく。

Theorem 1.12. A を Banach alegbra とすると、これは $\mathcal{B}(A)$ の closed subalgebra と同型である。

Proof. $x \in A$ に対し、left multiplication $L_x : A \longrightarrow A$ とおくと、L_x は連続であるから、$L_x \in \mathcal{B}(A)$ である。そこで、$\widetilde{A} = \{L_x\}_{x\in A} \subset \mathcal{B}(A)$ とおく。これが closed であることを示す。$T \in \mathcal{B}(A)$ に収束する列 $T_i = L_{x_i} \in \widetilde{A}$ を考える。

$$L_{x_i}(y) = x_i y = (x_i e)y = L_{x_i}(e)y$$

であるが、$i \to \infty$ とすると、$T(y) = T(e)y$ である。今、$T(e) = x$ とおけば、

$$T(y) = xy = L_x y$$

となり、$T \in \widetilde{A}$ なので、$\widetilde{A}$ は closed in $\mathcal{B}(A)$ である。これより、$\widetilde{A}$ は Banach algebra であり、$A \longrightarrow \widetilde{A}$ は $x \mapsto L_x$ が Banach algebra の同型を与える。 □