1　Gel'fand-Naimark duality（空間において）

Compact Hausdorff 空間の間の連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ からは、commutative Banach algebra 間の complex homomorphism $f^* : C(Y) \longrightarrow C(X)$ が、$\varphi \mapsto \varphi f$ により定義される。逆に、complex homomorphism $f : A \longrightarrow B$ からも、$f^* : M_B \longrightarrow M_A$ が同様の対応で得られる。今、$\varphi \in M_B$ に対し、

$$\begin{aligned}(f^*)^{-1}W(\varphi f, a, \varepsilon) &= (f^*)^{-1}\mathrm{ev}(a)^{-1}(U_\varepsilon(\varphi f(a)))\\ &= (\mathrm{ev}(a)f^*)^{-1}(U_\varepsilon(\varphi f(a)))\\ &= (\mathrm{ev}(f(a))^{-1}(U_\varepsilon(\varphi f(a)))\\ &= W(\varphi; f(a), \varepsilon)\end{aligned}$$

より、f^* は連続である。これより、

$$C : \textbf{Compact Hausdorff} \leftrightarrows \textbf{Banach alg}^{op} : M$$

という functor の対応ができる。またこの対応は、ベクトル空間の双対対応と似ていることから Gel'fand-Naimark duality 対応と呼ばれる。またベクトル空間の時と同様 adjoint 対応になっている。ではこの functor で行って戻ってきた際に元とどれぐらい違うのかを、双方の category で検証してみる。

1.1　Compact Hausdorff spaces において

Definition 1.1. $\mathrm{ev} : X \longrightarrow M_{C(X)}$ を、$\mathrm{ev}(x)(f) = f(x)$ により定義する。このとき、$C(X)$ の演算から $\mathrm{ev}(x)$ は complex homomorphism になる。また、$x \in X$ に対し、$\mathrm{ev}(x) \in W(\mathrm{ev}(x); f, \varepsilon)$ という開近傍を考えると、

$$\begin{aligned}x \in \mathrm{ev}^{-1}W(\mathrm{ev}(x); f, \varepsilon) &= \{y \in X | \mathrm{ev}(y) \in W(\mathrm{ev}(x); f, \varepsilon)\}\\ &= \{y \in X |\ |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}\\ &= f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))\end{aligned}$$

f は連続だから、open であり、ev は連続である。

次は有名な Urysohn の補題である。

Lemma 1.2 (Urysohn). X を正規空間とし、A, B をその空でない閉集合で、$A \cap B = \phi$ とする。このとき、連続写像 $f : X \longrightarrow [0, 1]$ で、$f(A) = 0$、$f(B) = 1$ を満たすものが存在する。

Proposition 1.3. ev は単射である。

Proof. $x \neq y$ という X の元をとる。compact Hausdorff は正規なので、Urysohn の補題により、$f : X \longrightarrow [0, 1]$ で、$f(x) = 0$、$f(y) = 1$ を満たす連続写像が存在する。$[0, 1] \subset \mathbb{C}$ に埋め込んで、$f \in C(X)$ と考えれば、$\mathrm{ev}(x)(f) = f(x) = 1$ であるが、$\mathrm{ev}(y)(f) = f(y) = 1$ であるため、$\mathrm{ev}(x) \neq \mathrm{ev}(y)$ となる。 □

Lemma 1.4. $\varphi \in M_{C(X)}$ とする。このとき $x \in X$ で、任意の $f \in \mathrm{Ker}\varphi \subset C(X)$ に対し、$f(x) = 0$ となるもの（共通零点）が存在する。

Proof. まず、任意の有限個の $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathrm{Ker}\varphi$ に対し、共通零点があることを示す。今、任意の $x \in X$ に対し、$f_j(x) \neq 0$ となる $1 \leqq j \leqq n$ が存在したとする（j は x に依存する）。

$$p = \sum_{i=1}^{n} f_i \overline{f}_i \in C(X)$$

とおく、ただし、$\overline{f}_i(x) = \overline{f_i(x)}$ である。任意の $x \in X$ に対し、$p(x) \neq 0$ なので、$p^{-1} \in C(X)$。これより、φ が complex homomorphism であることから、$\varphi(p) \neq 0$。しかし、実際には $f_i \in \mathrm{Ker}\varphi$ なので、

$$\varphi(p) = \sum \varphi(f_i)\varphi(\overline{f_i}) = 0$$

である。これは矛盾。よって、$\mathrm{Ker}\varphi$ の任意有限部分集合においては共通零点が存在する。今、$f \in \mathrm{Ker}\varphi$ において、$f^{-1}(0)$ は X の閉集合である。$\{f^{-1}(0)\}_{f \in \mathrm{Ker}\varphi}$ は X の閉集合族で、上記の議論から任意有限個の共通部分は空でない。

$$\bigcap_{\text{finite}} f^{-1}(0) \neq \phi$$

よって compact と閉集合族に関する有限交叉性は同値なので、

$$\bigcap_{f \in \mathrm{Ker}\varphi} f^{-1}(0) \neq \phi$$

つまり、$\mathrm{Ker}\varphi$ の共通零点が存在する。 $\square$

Proposition 1.5. ev は全射である。

Proof. $\varphi \in C_{M(A)}$ をとると、Lemma 1.4 から、$\mathrm{Ker}\varphi$ の共通零点 $x \in X$ が存在する。つまり、$\mathrm{Ker}\varphi \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}(x))$ である。今、双方とも maximal ideal なので、

$$\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}(x))$$

任意の $f \in C(X)$ に対し、$f(x)e - f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}(x))$ であるため、

$$\varphi(f(x)e - f) = 0$$

これより、$\mathrm{ev}(x)(f) = f(x) = \varphi(f)$ なので、$\mathrm{ev}(x) = \varphi$ である。 $\square$

Theorem 1.6. $\mathrm{ev} : X \longrightarrow M_{C(X)}$ は同相写像である。

Proof. Proposition 1.3 と 1.5 により、compact Hausdorff 間の全単射連続なので。 $\square$

これよりわかるのは compact Hausdorff 空間の圏は単位元を持つ可換な Banach algebra の圏に埋め込まれているということである。一般的に逆の A と $C(M_A)$ は同型にならないことから、この C という functor のイメージに当たるものを考察する。