1 Gel'fand-Naimark duality (Banach algebraにおいて)

今度は、Banach algebra の世界で、Gel'fand 対応によってどのように移りあってきたのかを考察する。

Definition 1.1. $\mathrm{ev}: A \longrightarrow C(M_A)$ を、$\mathrm{ev}(a)(f) = f(a)$ により定義する。$f \in M_A$ に対し、

$$f \in \mathrm{ev}(a)^{-1}(U_\varepsilon(f(a))) = \{\varphi \in M_A \mid |\varphi(a) - f(a)| < \varepsilon\} = W(f; a, \varepsilon)$$

なので、$\mathrm{ev}(a)$ は連続。また、$\mathrm{ev}(a)$ は complex homomorphism になる。

Theorem 1.2. 任意の $a \in A$ に対し、$\mathrm{ev}(a)(M_A) = \sigma(a)$ in $\mathbb{C}$

Proof. $\lambda \in \mathrm{ev}(a)(M_a)$ とすると、$f \in M_A$ で、$\mathrm{ev}(a)(f) = f(a) = \lambda$ となるものが存在する。

$$\lambda e - a = f(a)e - a \in \mathrm{Ker} f$$

であり、$\mathrm{Ker} f$ が maximal ideal であることから、$(\lambda e - a) \notin G(A)$。よって、$\lambda \in \sigma(x)$。逆に、$\lambda \in \sigma(x)$ をとると、

$$I = \{(\lambda e - a)b | b \in A\}$$

というのは A の ideal である。今、I を含む maximal ideal M が存在し、M に対応する complex homomorphism を f とすると、$\mathrm{Ker} f = M$。つまり、$f(I) = 0$ なので、$b = e$ とすれば、$f(\lambda e - a) = 0$。よって、$\lambda = f(a) = \mathrm{ev}(a)(f)$ となり、$\lambda \in \mathrm{ev}(a)(M_A)$。 □

Corollary 1.3. 任意の $a \in A$ に対し、$||\mathrm{ev}(a)|| = r(a)$

Proof.

$$||\mathrm{ev}(a)|| = \sup_{f \in M_A}\{|\mathrm{ev}(a)(f)|\} = \sup_{\lambda \in \sigma(a)}\{|\lambda|\} = r(a)$$

□

Lemma 1.4. $a \in A$ に対し、次は同値である。

1. $||a^2| = ||a||^2$
2. $r(a) = ||a||$
3. $||\mathrm{ev}(a)|| = ||a||$

Proof. 2) $\Longleftrightarrow$ 3) は、Corollary 1.3 から示される。1) $\Longrightarrow$ 2) については、

$$||a^4|| = ||(a^2)^2|| = ||a^2||^2 = ||a||^4$$

となるため、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、$||a^{2^k}|| = ||a||^{2^k}$ である。収束列の部分列も収束するので、

$$r(a) = \lim_{n\to\infty}||a^n||^{1/n} = \lim_{k\to\infty}||a^{2^k}||^{1/2^k} = ||a||$$

逆に、2) $\Longrightarrow$ 1) については、

$$||a^2|| = r(a^2) = r(a)^2 = ||a||^2$$

となる。 □

Proposition 1.5. 任意の $a \in A$ において、$||a^2|| = ||a||^2$ ならば、ev は単射である。

Proof. Lemma 1.15 により、$||\mathrm{ev}(a)|| = ||a||$ となることから、ev は isometric なので単射である。 $\square$

これより、条件を満たす A は $C(M_A)$ の subalgebra と見なせる。さてこの norm の条件を満たす Banach algebra として C^*-algebra が考えられる。

Definition 1.6. $\mathbb{C}$ 上の algbera における実線形写像 $* : A \longrightarrow A$ が次を満たすとき、

1. $(x^*)^* = x$
2. $(xy)^* = y^* x^*$
3. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$

A を $*$-*algebra* と呼ぶ。*Banach algebra* かつ、$*$-*algebra* で、

$$||x^* x|| = ||x x^*|| = ||x||^2$$

を満たすとき、A を C^*-*algebra* という。

Remark 1.7. $C(X)$ は $f^* = \overline{f}$ により、C^*-algebra となる。

Lemma 1.8. A が C^*-algebra ならば、任意の $a \in A$ に対し、$||a^*|| = ||a||$ である。

Proof. $||a||^2 = ||aa^*|| \leqq ||a|| \cdot ||a^*||$ により、$||a|| \leqq ||a^*||$ である。今、$a = a^*$ で置き換えれば、逆の不等式が得られる。 $\square$

Lemma 1.9. A が C^*-algebra ならば、任意の $a \in A$ に対し、$||a^2|| = ||a||^2$ である。

Proof.

$$||a^2|||^2 = ||a^2(a^2)^*|| = ||aaa^*a^*|| = ||(aa^*)(aa^*)^*|| = ||aa^*||^2 = ||a||^4$$

より、$||a||^2 = ||a^2||$ $\square$

よって、A が C^*-algebra ならば、A は $C(M_A)$ の csubalgbera であることがわかる。また、A は norm に関して完備なので、$\mathrm{ev}(A)$ は $C(M_A)$ の完備な部分空間となる。今、$\{\mathrm{ev}(a_n)\}$ が φ に収束したとすると、これは Cauchy 列である（一般の norm 空間においても収束列ならば Cauchy 列）。よって、A の完備性から、$\varphi \in \mathrm{ev}(A)$ となり、$\mathrm{ev}(A)$ は closed である。ただし、$C(M_A)$ の位相は norm から決まる位相を考えている。関数環の closed subalgebra では以下のことが有効である。

Definition 1.10. Xcompact Hausdorff 空間とし、X 上の実数値連続関数全体を $C_{\mathbb{R}}(X)$ とかく。複素数と同様に norm や代数構造を考えると Banach algebra である。$A \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ が一様に閉であるとは、norm から定まる $C_{\mathbb{R}}(X)$ の位相により閉集合となることをさす。この章では単に閉といったら一様に閉ということにする。また、A が $C(X)$ を分離するとは、任意の $x \neq y \in X$ に対し、$f(x) \neq f(y)$ となる $f \in A$ が存在することである。

Theorem 1.11 (Weierstrass 多項式近似定理). 連続関数 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し、$[a, b]$ 上で f に一様収束する多項式関数列 $\{P_n\}$ が存在する。すなわち、任意の $x \in [a, b]$ と、$\varepsilon > 0$ に対し、

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

となる $[a, b]$ 上の多項式 $P(x)$ が存在する。

Lemma 1.12. $A \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ を closed subalgebra とする。$f \in A$ に対し、$|f|(x) = |f(x)|$ とすると、$|f| \in A$ である。

Proof. $a = ||f||$ とおき、$|-| : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し、Weierstrass の多項式近似を適用すると、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、

$$||u| - P(u)| < \varepsilon \quad (u \in [a, b])$$

となる多項式 $P(u) = \sum_{k=0}^{n} c_k u^k$ が存在する。今、

$$g := \sum_{k=0}^{n} c_k f^k \in A$$

であり、$x \in X$ に対し、$|f(x)| \leqq ||f|| = a$ であることから、$f(x) \in [-a, a]$ なので、

$$|(|f| - g)(x)| = ||f(x)| - g(x)| < \varepsilon$$

よって、operator norm の定義から、$|||f| - g|| < \varepsilon$ となり、$|f|$ は A の閉包に属することがわかるが、A は閉なので $|f| \in A$。 □

Lemma 1.13. $\subset C_{\mathbb{R}}(X)$ を closed subalgebra とする。$f, g \in A$ に対し、$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$、$\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ で定義すると、$\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in A$ である。

Proof.

$$\max(\min)\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) \pm \frac{1}{2}(|f - g|)$$

であることと、Lemma 1.12 から従う。 □

Corollary 1.14. 任意有限個の $\{f_1, \cdots, f_n\} \in A$ に対しても、$\max\{f_j\}, \min\{f_j\} \in A$ である。

Lemma 1.15. $A \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ を closed subalgebra とする。A が X を分離すると、任意の $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$、 $x \in X$、$\varepsilon > 0$ に対し、$g_x \in A$ が存在し、$g_x(x) = f(x)$ かつ、$f(t) - \varepsilon < g_x(t)$ $(t \in X)$ を満たす。

Proof. $x \neq y$ に対し、$\varphi \in A$ で、$\varphi(x) \neq \varphi(y)$ となるものがある。今、$h_y \in C_{\mathbb{R}}(X)$ を以下で定義する。

$$h_x(t) = f(x)\frac{\varphi(t) - \varphi(y)}{\varphi(x) - \varphi(y)} + f(y)\frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)}$$

今、変数は t であり、それ以外はすべてスカラーである。また、定数関数は $1 \in A$ より、A に属している。よって、$h_x \in A$ である。また、$h_x(x) = f(x)$、$h_x(y) = f(y)$ であることがわかる。このとき、$x = y$ において、$h_x(t) = f(x)$ と恒等関数で定義する。任意の $x \in X$ に対し、h_x は連続なので、$h_x - f$ を考えると、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、x の開近傍 U_x が存在し、$t \in U_x$ に対し、$|h_x(t) - f(t)| < \varepsilon$ である。絶対値をはずせば、$f(t) - \varepsilon < h_x$ である。今、$\{U_x\}_x \in X$ は開被覆なので、X が compact より有限個を選んで被覆できる。それを $x_1, \cdots, x_n \in X$ とおく。このとき、

$$g_x = \max\{h_{x_i}\}$$

によって定義すると、Corollary 1.14 により、A に属し、$g_x(x) = f(x)$ かつ、$f(t) - \varepsilon < g_x(t)$ である。 □

Theorem 1.16 (Stone). $A \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ を closed subalgebra とする。A が X を分離すると、$A = C_{\mathbb{R}}(X)$ である。

Proof. $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ をとる。$x \in X$ に対し、Lemma 1.15 の性質を持つ $g_x \in A$ をとる。これは連続なので、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、x の開近傍 V_x で、$t \in V_x$ に関し、

$$|g_x(t) - f(t)| < \varepsilon$$

となるものが存在する。絶対値をはずせば、$g_x(t) < f(t) + \varepsilon$ である。$\{V_x\}_{x \in X}$ が X の開被覆で X が compact であることから、有限個を選んで被覆できる。それを $x_1, \cdots, x_m$ とすれば、

$$g := \min\{g_{x_j}\} \in A$$

である。これは、

$$f(t) - \varepsilon < g(x) < f(t) + \varepsilon$$

満たすため、$|g(t) - f(t)| < \varepsilon$ が任意の $t \in X$ について成り立つ。すなわち、$||g - f|| < \varepsilon$ であり、f は A の閉包に属する。A は閉だから、$f \in A$ となる。 □

この理論を複素関数に拡張するわけだが、上記の議論で実数値というのは本質的であり、これを素直にそのまま拡張はできない。

Theorem 1.17. $A \subset C(X)$ を $C(X)$ を分離する closed subalgebra とする。

$$A^* = \{\overline{f} \in C(X) | \overline{f}(x) = \overline{f(x)}, f \in A\}$$

とおく。$A^* = A$ ならば、$A = C(X)$ である。

Proof. $A_{\mathbb{R}} \subset A$ を A に属する実数値関数全体の部分集合とする。したがって、$A_{\mathbb{R}} \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ であるが、これが Theorem 1.16 の定理の条件を満たしていることを確かめる。

1. $A_{\mathbb{R}}$ が閉であること。$f \in C(X)$ に収束する $A_{\mathbb{R}}$ の数列 $\{f_n\}$ を考える。

   $$|f_n(x) - \overline{g}(x)| = |\overline{f_n(x) - g(x)}| = |f_n(x) - g(x)| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

   であるため、

   $$||f_n - g|| = ||f_n - \overline{g}||$$

   である。よって、

   $$||g - \overline{g}|| = ||(g - f_n) - (\overline{g} - f_n)|| \leqq 2||g - f_n|| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

   よって、$g = \overline{g}$ である。A は closed なのでから、$g \in A$ であり、$g \in A_{\mathbb{R}}$ より、$A_{\mathbb{R}}$ が closed が言えた。

2. $A_{\mathbb{R}}$ が $C_{\mathbb{R}}(X)$ を分離すること。仮定から $x \neq y \in X$ に対しては、$f(x) \neq f(y)$ となる $f \in A$ が存在する。今、

   $$g(t) = \frac{f(t) - f(x)}{f(y) - f(x)}$$

   で定義すれば、$g \in A$ で、$g(x) = 0$、$g(y) = 1$ である。仮定により、$\overline{g} \in A$ である。このとき、$u = (g + \overline{g})/2$ で定義すると、$u \in A_{\mathbb{R}}$ になる。また、$u(x) = 0$ で、$u(y) = 1$ を満たす。

以上より、Stone の定理から、$A_{\mathbb{R}} = C_{\mathbb{R}}(X)$ である。次に任意の $f \in C(X)$ に対して、

$$v = \frac{1}{2}(f + \overline{f})\ ,\ w = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$$

とすれば、$u, v \in C_{\mathbb{R}}(X)$ であるから、$u, v \in A_{\mathbb{R}} \subset A$ である。よって、

$$f = u + vi \in A$$

である。 □

上記を $A \subset C(M_A)$ に適用すれば、Gel'fand Naimark duality の証明は完成する。

Lemma 1.18. $a = a^*$ in A ならば、$\mathrm{ev}(a) \in C_{\mathbb{R}}(X)$ である。

Proof. $f \in M_A$ で、$\mathrm{ev}(a)(f) = f(a) = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ となるものが存在したとする。このとき、

$$b = (a - \alpha e)/\beta \in A$$

とおくと、$b^* = b$ であり、

$$f(b) = f(a - \alpha e)/\beta = (f(a) - \alpha)/\beta = i$$

である。よって、$b - ie \in \mathrm{Ker} f$ で、$\mathrm{Ker} f$ は maximal ideal であるから、$b - ie \notin G(A)$。つまり、$i \in \sigma(b)$ である。$G(A)$ は $*$ で閉じているので、

$$b + ie = (b - ie)^* \notin G(A)$$

これより、$-i \in \sigma(b) = \mathrm{ev}(b)(M_A)$ なので、$g \in M_A$ が存在し、$g(b) = -i$ である。今、任意に $K > 0$ をとると、

$$\mathrm{ev}(b - iKe)(g) = -i(1 + k)\ ,\ \mathrm{ev}(b + iKe)(f) = i(1 + K)$$

であり、

$$1 + K \leqq= |\mathrm{ev}(b - iKe)(g)| \leqq ||\mathrm{ev}(b - iKe)|| = r(b - iKe) \leqq ||b - iKe||$$

であり、同様に、次の等式から $1 + K \leqq ||b + iKe||$ となることがわかる。両辺で積を取ると、

$$(1 + K)^2 = ||b - iKe|| \cdot ||b + iKe|| \leqq ||(b - iKe)(b + iKe)|| = ||b^2 + K^2|| \leqq ||b^2|| + K^2$$

整理すると、

$$1 + 2K \leqq ||b^2||$$

となり、$K > 0$ は任意だったので、これは矛盾である。よって、任意の $f \in M_A$ に対し、$\mathrm{ev}(a)(f) = f(a) \in \mathbb{R}$ である。 □

Proposition 1.19. ev は全射である。

Proof. Theorem 1.16 の条件を確かめればよい。$f \neq g \in M_A$ にとすると、$a \in A$ で $f(a) \neq g(a)$ となるものが存在する。これは、$\mathrm{ev}(a)(f) \neq \mathrm{ev}(a)(g)$ を意味していて、分離性はよい。次に、$a \in A$ に対し、

$$b = (a + a^*)/2\ ,\ c = (a - a^*)/2i$$

とおくと、$b^* = b, c^* = c$ であり、$a = b + ci$ である。Lemma 1.18 により、$\mathrm{ev}(b), \mathrm{ev}(c) \in C_{\mathbb{R}}(M_A)$ である。

$$\mathrm{ev}(a^*) = \mathrm{ev}((b+ci)^*) = \mathrm{ev}(b - ci) = \mathrm{ev}(b) - \mathrm{ev}(c)i = \overline{\mathrm{ev}(b) + \mathrm{ev}(c)i} = \overline{\mathrm{ev}(a)}$$

なので、$\mathrm{ev}(A)^* = \mathrm{ev}(A)$ である。よって、$\mathrm{ev}(A) = C(M_A)$ となって ev は全射である。 $\square$

Theorem 1.20. $\mathrm{ev} : A \longrightarrow C(M_A)$ は Banach algebra として同型である。

以上より、$C(-) : \mathbf{Compact\ Hausdorff} \longrightarrow \mathbf{Banach\ alg}$ のイメージとしては C^*-algebra が考えられる。よって、C^***-alg** を可換な C^*-algebra のなす **Banach alg** の full subcategory とすれば、次の定理を得る。

Theorem 1.21 (Gel'fand-Naimark).

$$C(-) : \mathbf{Compact\ Hausdorff} \cong C^*\textbf{-alg} : M_-$$

は category の同値である。