1 Homomorphisms

この章では Banach algebra から、$\mathbb{C}$ への写像を考える。$\mathbb{C}$ も Banach algebra なので、条件として bounded operator で algebra 構造を保つものが妥当そうである。しかし、実際にはいくつかの条件は要らない。

Definition 1.1. A を Banach algebra としたとき、線形写像 $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ が $f(xy) = f(x)f(y)$ を満たすとき、complex homomrphism と呼ぶ。ただし、0-map は除く。

Lemma 1.2. $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ を complex homomorphism とし、A が単位元 e をもつとき、$f(e) = 1$ であり、可逆元 x に対し、$f(x) \neq 0$ である。

Proof. f は 0-map でないので、$y \in A$ で $f(y) \neq 0$ が存在する。

$$f(y) = f(ye) = f(y)f(e)$$

より、$f(e) = 1$ である。また、可逆元 $x \in A$ に対し、

$$1 = f(e) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1})$$

であるため、$f(x) \neq 0$ である。 □

Theorem 1.3. A を Banach algebra とし、$x \in A$ で、$||x|| < 1$ とすると、次が成り立つ。

1. $e - x$ は可逆である。
2. $||(e - x)^{-1} - e - x|| \leqq \dfrac{||x||^2}{1 - ||x||}$
3. 任意の complex homorphism f に対し、$|f(x)| < 1$ である。

Proof. 1) $s_n = \sum_{m=0}^{n} x^m$ と置くと、

$$||s_n - s_{n-1}|| = ||x^n|| \leqq ||x||^n$$

であり、$||x|| < 1$ なので、これは 0 に収束し、$\{s_n\}$ が Cauchy 列であることがわかる。この数列の収束先を $s \in A$ とおく。

$$s_n(e - x) = (e - x)s_n = e - x^{n+1}$$

である。各項において、$n \to \infty$ とすると、

$$s(e - x) = (e - x)s = e$$

よって、$s = (e - x)^{-1}$ である。

2) 上記から、

$$||(e - x)^{-1} - e - x|| = ||x^2 + x^3 + \cdots|| \leqq \sum_{n=2}^{\infty} ||x||^n = \frac{||x||^2}{1 - ||x||}$$

である。

3) $\lambda \in \mathbb{C}$ で、$|\lambda| \geqq 1$ とする。このとき、1) により、$e - x/\lambda$ は可逆である。これより、Lemma 1.2 から、

$$f(e - x/\lambda) = 1 - f(x)/\lambda \neq 0$$

なので、$f(x) \neq \lambda$ □

Corollary 1.4. complex homomorphism は bounded であり、その norm は 1 である。

Proof. $x \in A$ をとる。任意の $\lambda \in \mathbb{C}$、$|\lambda| > ||x||$ に対し、Theorem 1.3 により、

$$\sup_{||x||=1}\{|f(x)|\} = \sup_{||x||=1}\{|\lambda| \cdot |f(x/\lambda)|\} \leqq |\lambda|$$

であるため、$||f|| \leqq ||x||$ となる。今、$||e|| = 1$ で、$|f(e)| = 1$ なので、$||f|| = 1$ となる。 □

これにより、Banach algebra からの関数は積構造を保つだけで連続性が保証されることになる。Complex homomorphism の性質は Lemma 1.2 で述べたようなことがあるが、実はこれだけで特徴付けられるというのが、Gleason, Kahane, Zelazko による定理である。

Theorem 1.5. $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ を線形写像とするとき、$f(e) = 1$、 任意の可逆元 $x \in A$ に対し、$f(x) \neq 0$ であれば、complex homomorphism である。

これを証明するのはかなり大変なので、色々と準備が要る。

Proposition 1.6. $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ を線形写像とするとき、$f(e) = 1$、任意の可逆元 $x \in A$ に対し、$f(x) \neq 0$ であれば bounded であり、$||f|| = 1$ である。

Proof. $a \in A$ に対し、$b := f(a)e - a \in \mathrm{Ker}f$ で、$a = f(a)e - b$ である。任意の $x \in \mathrm{Ker}f$ に対し、仮定から x は非可逆であり、$x = e - (e - x)$ なので、Proposition 1.3 により、$||e - x|| \geqq 1$ である。今、$a \in \mathrm{Ker}f$ なら、$||a|| \geqq |f(a)| = 0$ であり、そうでないときも、

$$||a|| = ||f(a)e - b|| = |f(a)| \cdot ||e - (b/|f(a)|)|| \geqq |f(a)| = |f(f(a)e - b)| = |f(a)|$$

なので、

$$||f|| = \sup_{||a||=1}\{|f(a)|\} \leqq 1$$

から bounded であり、また、$|f(e)| = 1$ から、$||f|| = 1$ が従う。 □

次に説明するのは複素関数の重要な性質である。よく知られているのは、有界な正則関数は定置写像のみであるという定理であるが、その有界性を弱め、関数を entire function に制限しても成り立つ。証明は省略する。

Definition 1.7. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ が entire function であるとは、

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$$

の形で、$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ であるようなものをさす。

Lemma 1.8. f を entire function としたとき、$f(0) = 1$、$f'(0) = 0$、任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し、$0 < |f(\lambda)| \leqq e^{|\lambda|}$ と仮定する。このとき、任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し、$f(\lambda) = 1$ となる。

Lemma 1.9. $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ を線形写像とするとき、$f(e) = 1$、任意の可逆元 $x \in A$ に対し、$f(x) \neq 0$ とする。$a \in \mathrm{Ker}f$ ならば、$a^2 \in \mathrm{Ker}f$ である。

Proof. $a \in \mathrm{Ker} f$ を fix する。このとき、$||a|| = 1$ としても一般性は失われない。$\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ を、

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a^n)}{n!} \lambda^n$$

により定義すると、$\phi(0) = 1$、$\phi'(0) = \phi(a) = 0$ であり、$|f(a^n)| \leqq ||a^n|| \leqq ||a||^n = 1$ なので、

$$|\phi(\lambda)| \leqq e^{|\lambda|}$$

である。さらに、任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し、$\psi : \mathbb{C} \longrightarrow A$ を

$$\psi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} a^n$$

で定義すると、

$$||(\lambda^n a^n)/n!|| \leqq |\lambda^n|/n! \cdot ||a^n|| \leqq |\lambda|^n/n!$$

なので、ψ はきちんと収束し、entire function であることもわかる。f の連続性から、

$$\phi(\lambda) = f(\psi(\lambda))$$

である。$\psi(\lambda) = \exp(a\lambda)$ であるから、$\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda)\psi(\mu)$ である。特に、

$$\psi(\lambda)\psi(-\lambda) = \psi(0) = e$$

であるため、任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し、$\psi(\lambda)$ は可逆である。よって、仮定により、$\phi(\lambda) = f(\psi(\lambda)) \neq 0$ となる。よって、Lemma 1.8 が適用できるため、$\phi = 1$ なので、$\phi''(0) = f(a^2) = 0$ である。 □

Corollary 1.10. $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ を線形写像とするとき、$f(e) = 1$、任意の可逆元 $x \in A$ に対し、$f(x) \neq 0$ とする。$a \in \mathrm{Ker} f$、 $b \in A$ ならば、$ab \in \mathrm{Ker} f$ である。

Proof. $x \in A$ に対し、$c = x - f(x)e \in \mathrm{Ker} f$ とおくと、$x = f(x)e + c$ である。Lemma 1.9 により、

$$f(x^2) = f(f(x)^2 e + f(x)c + cf(x) + c^2) = f(x)^2$$

となる。今、$x = a + b$ とすると、

$$f(a^2 + ab + ba + b^2) = f(a)^2 + f(a)f(b) + f(b)f(a) + f(b)^2$$

であるため、

$$f(ab + ba) = f(ab) + f(ba) = 2f(a)f(b) = 0$$

これより、$ab + ba \in \mathrm{Ker} f$。また、

$$(ab - ba)^2 + (ab + ba)^2 = 2(a(bab) + (bab)a)$$

となるため、今の議論を繰り返すと右辺が $\mathrm{Ker} f$ に属する。$(ab + ba)^2$ もそうなので、$(ab - ba)^2$ もそうである。$f((ab - ba)^2) = (f(ab - ba))^2$ だったので、$f(ab - ba) = 0$。すなわち、$ab - ba \in \mathrm{Ker} f$。よって、

$$ab = ((ab + ba) + (ab - ba))/2 \in \mathrm{Ker} f$$

□

Theorem 1.11. $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ を線形写像とするとき、$f(e) = 1$、任意の可逆元 $x \in A$ に対し、$f(x) \neq 0$ であれば、complex homomorphism である。

Proof. Cor 1.10 と同様に、$a, b \in \mathrm{Ker} f$ を用いて、$x = f(x)e + a$、$y = f(y)e + b$ と表示する。Cor 1.10 により、

$$f(xy) = f(x)f(y) + f(ab) = f(x)f(y)$$

となる。 □