層 (Sheaf)

スタック (Stack) とは、一言でいうならば圏の層 (Sheaf of category) である。もともとは Grothendieck によるアイデアであり、小圏を空間のように扱い、その被覆の表現を調べる概念である。

まずは通常の層の概念を復習しておく。

Definition 0.1. X を空間とする。$O(X)$ を X の位相、つまりすべての開集合からなる集合とし、包含関係によって半順序集合 (poset) とみなす。半順序集合は順序のある方に１本の射を持つ小圏とみなせるので、関手

$$F : O(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

を集合に値を持つ前層とよぶ。$\mathrm{Psh}(X)$ を集合を値にもつ前層からなる集合とし、関手圏として圏とみなす。

Definition 0.2. 前層 $F : O(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ が層であるとは、任意の開集合 U とその開被覆、$U = \bigcup_{i \in I} U_i$ に対し、

$$F(U) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

がイコライザーであること、つまり、$F(U)$ からイコライザーへの写像が同型であることである。この意味としては、まず空間のレベルで、コイコライザー

$$\coprod_{i,j} U_i \cap U_j \rightrightarrows \coprod_i U_i \longrightarrow U$$

のダイアグラムがある。これが反変関手 F によって、イコライザーに変換できることを意味している。

Example 0.3. X を空間とし、$p : E \longrightarrow X$ を連続写像とする。U を X の開集合としたとき、p の U 上の切断の集合、

$$\Gamma_p(U) = \{s : U \longrightarrow X \mid p \circ s = 1_U\}$$

と定義すると、$\Gamma_p : O(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ は層である。これは、$V \subset U$ に対し、$\Gamma_p(U) \longrightarrow \Gamma_p(V)$ が制限によって与えられることによる。

切断による対応 Γ は、$\Gamma : \mathbf{Top} \downarrow X \longrightarrow \mathrm{Sh}(X)$ を与えるが、この逆対応を考えよう。ただし、$\mathbf{Top}$ は位相空間と連続写像の圏である。

Definition 0.4. $F : O(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を前層とする。$x \in X$ に対し、

$$F_x := \mathrm{colim}_{x \in U} F(U)$$

と定義し、x 上の茎 (stock) と呼ぶ。$E_F = \coprod_x F_x$ とおき、$p_F : E_F \longrightarrow X$ を、$e \in F_x$ に対し、$p_F(e) = x$ と定義する。$u \in F(U)$ に対し、 $\tilde{u} : U \longrightarrow E_F$ を、$\tilde{u}(x) = [u] \in F_x$ により与える。このとき、$\{\tilde{u}(U) \mid U \in O(X), u \in F(U)\}$ を E_F の基底として、E_F に位相を入れる。この位相は少し分かりずらいが、$\tilde{u}$ がすべての $u \in F(U)$ に対し連続で、p_F の切断となる最小の位相という意味である。つまり、p_F の U 上の連続な切断はすべて、$\tilde{u}$ の形をしているということである。

Definition 0.5. $p : E \longrightarrow B$ がエタール写像とは、任意の $e \in E$ に対し、開近傍 $e \in V \subset E$ が存在し、$p_{|V} : V \longrightarrow p(V)$ が同相である。

Proposition 0.6. $p_F : E_F \longrightarrow X$ はエタール写像である。

Proof. $U \subset X$ を開集合とすると、

$$p_F^{-1}(U) = \{e \in E_F \mid p_F(e) \in U\} = \{[s] \in \coprod_{x \in U} \mathrm{colim}_{x \in V} F(V)\} = \{\tilde{s}(x) \mid x \in V \subset U, s \in F(V)\}$$

であり、これは連続である。また、$p_F(\tilde{s}(U)) = U$ なので、これは開写像である。$e \in E_F$ に対し、$e \in F_x = \mathrm{colim}_{x \in U} F(U)$ とする。$e = [u], u \in F(U)$ と表す。定義より、$e = \tilde{u}(x) \in \tilde{u}(U)$ は E_F の開集合である。このとき、

$$p_F : \tilde{u}(U) \longrightarrow p_F(\tilde{u}(U))$$

が同相であることを示す。単射を示せばよい。$a, b \in \tilde{u}(U)$ で、$p_F(a) = p_F(b)$ とすると、$a, b \in F_y$ である。$a', b' \in U$ で、$\tilde{u}(a') = a, \tilde{u}(b') = b$ と表せるが、

$$a = \tilde{u}(a') = u = \tilde{u}(b') = b \in F_y$$

であり、単射が示せた。 □

写像の切断による対応は、$\Gamma : \mathbf{Top} \downarrow X \longrightarrow \mathrm{Psh}(X)$ を与え、逆に、前層の茎を集めると、$\mathrm{Psh}(X) \longrightarrow \mathbf{Top} \downarrow X$ という関手が与えられる。これらの対応については次のようなことが知られている。

Proposition 0.7. 空間 X に対し、$E : \mathrm{Psh}(X) \Longleftrightarrow \mathbf{Top} \downarrow X : \Gamma$ は随伴関手である。

Proof. $F : O(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を前層、$p : E \longrightarrow X$ を連続写像とする。

$$\alpha : \mathrm{Psh}(X)(F, \Gamma_p) \longrightarrow \mathbf{Top} \downarrow X(E_F, E)$$

を以下のように定義する。自然変換 $t : F \Longrightarrow \Gamma_p$ に対し、$\alpha(t) : E_F \longrightarrow E$ を次で与える。$e \in E_F$ とすると、$e = [u] \in F_x$, $u \in F(U)$ と表せるので、$t_U : F(U) \longrightarrow \Gamma_p(U)$ を考え、$t_U(u) : U \longrightarrow E$ が構成できるため、$\alpha(t)(e) = t_U(u)(x)$ で与える。逆に、

$$\beta : \mathbf{Top} \downarrow X(E_F, E) \longrightarrow \mathrm{Psh}(X)(F, \Gamma_p)$$

は、$f : E_F \longrightarrow E$ に対し、$\beta(f) : F \Longrightarrow \Gamma_p$ は次で与える。$\beta(f)(U) : F(U) \longrightarrow \Gamma_p(U)$ を、$\beta(f)(U)(u)(x) = f[u]$, $[u] \in F_x$, $x \in U$ によって与えられる切断で定義する。α と β が互いに逆写像であることは簡単に示せる。 □

上記の対応は、より制限させた部分圏への対応を与えているが、層とエタール写像の間では圏として同値となっている。

Proposition 0.8. 上記の関手を制限すると、$E : \mathrm{Psh}(X) \cong \mathrm{E'tale}(X) : \Gamma$ は圏の同値となる。

Proof. $F : O(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を層とする。

$$\Gamma(E_F)(U) = \{s : U \longrightarrow E_F \mid p_F \circ s = 1\}$$

であるが、E_F の位相の定義より、p_F の切断は $F(U)$ の元により決定するため、$\Gamma(E_F)(U) \cong F(U)$ である。逆に、$p : E \longrightarrow X$ をエタール写像とすると、

$$E(\Gamma_p) = \coprod_{x \in X} (\Gamma_p)_x = \coprod_{x \in X} \mathrm{colim}_{x \in U} \Gamma_p(U) = \coprod_{x \in X} \mathrm{colim}_{x \in U} \{s : U \longrightarrow E \mid p \circ s = 1\}$$

エタール写像の定義から、$e \in E$ に対し、$e \in V$ が存在し、$p : V \cong p(V)$ となる。切断 $s(e) : p(V) \longrightarrow E$ を、$s(e)(x) = p^{-1}(x)$ により定義する。$E \longrightarrow E(\Gamma_p)$ が、$[s(e)] \in (\Gamma_p)_{p(e)}$ により与えられる。逆に、$E(\Gamma_p) \longrightarrow E$ が、$[s] \in (\Gamma_p)_x$ に対し、$s(x) \in E$ により与えられる。これらが互いに逆写像なのは簡単に確かめられる。 □