1 Stack

では、stack を定義する。Stack は sheaf 同様、prestack(fibered category) であり、張り合わせの条件を満たすものである。条件としてまず、景 (C, J) 上の prestack $F : C \longrightarrow \mathrm{Grd}$ を考える。このとき、$X \in C_0$ に対し、被覆 $\{j_i : U_i \longrightarrow X\}$ を考えると、$j_i^* : F(X) \longrightarrow F(U_i)$ が誘導され、$a \in F(X)_0$ に対し、$a_{|_{U_i}} = j_i^*(a) \in F(U_i)_0$ とおいて、a の U_i への制限と呼ぶ。$U_{ij} = U_i \times_X U_j$ とおく。$U_{ij} \longrightarrow U_i \longrightarrow X$ に関しては、$a_{|_{U_{ij}}} \cong (a_{|_{U_i}})_{|_{U_j}}$ であるが、これを同一視する場合がある。

以下は古典的な stack の定義である。

Definition 1.1. 景 (C, J) に対し、prestack $F : C \longrightarrow \mathrm{Grd}$ が stack であるとは、任意の被覆 $\{U_i \longrightarrow X\}$ に対し、以下の条件を満たすことである。

1. 任意の $a, b \in F(X)_0$ に対し、

$$F(X)(a, b) \longrightarrow \prod F(U_i)(a_{|_{U_i}}, b_{|_{U_i}}) \rightrightarrows \prod F(U_{ij})(a_{|_{U_{ij}}}, b_{|_{U_{ij}}})$$

   は集合のイコライザー図式である。

2. $a_i \in F(U_i)$ らと、同型射 $\alpha_{ij} : a_{i|_{U_{ij}}} \cong a_{j|_{U_{ij}}}$ らが与えられ、コサイクル条件

$$\alpha_{jk|_{U_{ijk}}} \circ \alpha_{ij|_{U_{ijk}}} = \alpha_{ik|_{U_{ijk}}}$$

   を満たしているとする。このとき、$a \in F(X)$ と、同型射 $\beta_i : a_{|_{U_i}} \cong a_i$ が存在し、

$$\begin{tikzcd} a_{|_{U_i}} \arrow[r, "\beta_{i|_{U_{ij}}}"] \arrow[d, "="'] & a_{i|_{U_{ij}}} \arrow[d, "\alpha_{ij}"] \\ a_{|_{U_i}} \arrow[r, "\beta_{j|_{U_{ij}}}"'] & a_{j|_{U_{ij}}} \end{tikzcd}$$

   の図式を可換にする。

Hollander の仕事は、この stack の定義をホモトピー論の側面から、ホモトピー極限を用いて書き換えたことである。これを説明するのに、いくつか定義や記述が必要である。

まずホモトピー（余）極限について説明しなければならない。ホモトピー（余）極限というのは、一言で説明するなら通常の（余）極限の導来関手という感覚である。この構成は様々なのだが、ホモトピー（余）極限は単体的モデル圏の構造を用いると、比較的わかりやすい。

Definition 1.2. モデル圏 M が単体的モデル圏であるとは、

1. $X, Y \in M_0$ と、$K \in \mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ に対し、写像空間 $\mathrm{Map}(X, Y) \in \mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ が与えられ、$\mathrm{Map}(X, Y)_0 \cong M(X, Y)$ であり、合成と恒等射の条件を満たす（単体的集合の enrich）。さらに、$X \otimes K, Y^K \in M_0$ が与えられ、単体的集合として

$$\mathrm{Map}(X \otimes K, Y) \cong \mathrm{Map}(K, \mathrm{Map}(X, Y)) \cong \mathrm{Map}(X, Y^K)$$

   という自然同型を持つ。

2. M において、$i : A \longrightarrow B$ を cofibration、$p : X \longrightarrow Y$ を fibration とすると、pull-back から誘導される

$$\mathrm{Map}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Map}(A, X) \times_{\mathrm{Map}(A,Y)} \mathrm{Map}(B, Y)$$

   は Kan fibration である。また、i, p のいずれかがさらに weak equivalence なら、これもまた weak equivalence である。

Example 1.3. Kan モデル圏 $\mathbf{Set}_K^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ は、$K,L \in \mathbf{Set}_0^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ に対し、$\mathrm{Map}(K,L) = L^K = \mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}(K \times \Delta_* Y)$, $K \otimes L = K \times L$ とすれば、単体的モデル圏である。

Example 1.4. Anderson モデル圏 Grd_A は、$G,H \in \mathrm{Grd}_0$, $K \in \mathbf{Set}_0^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ に対し、$\mathrm{Map}(G,H) = N\mathrm{Grd}(G,H)$, $G^K = \mathrm{Grd}(\pi_1(K),G)$, $H \otimes K = H \times \pi_1(K)$ により、単体的モデル圏となる。

Definition 1.5 (ホモトピー（余）極限). I を小圏とし、M を simplicial model category とする。関手 $F : I \longrightarrow M$ に対し、F のホモトピー極限 $\mathrm{holim}F \in M_0$ は次のイコライザーで与えられる。

$$\mathrm{holim}F \longrightarrow \prod_{i \in I_0} F_i^{N(I\downarrow i)} \rightrightarrows \prod_{i \to j} F_j^{N(I\downarrow i)}$$

双対的に、F のホモトピー余極限 $\mathrm{hocolim}F \in M_0$ は次のコイコライザーで与えられる。

$$\coprod_{i \to j} F_i \otimes N(j \downarrow I) \rightrightarrows \coprod_{i \in I_0} F_i \otimes N(i \downarrow I) \longrightarrow \mathrm{hocolim}F$$

通常の（余）極限と違う点は、ホモトピー不変性を持つということである。ここら辺の話は、[?] などのモデル圏の教科書を参考にするといい。

Theorem 1.6. *M を単体的モデル圏、$F,G : I \longrightarrow M$ を小圏 I からの関手とし、$t : F \Longrightarrow G$ を自然変換で、各々$t_i : F(i) \longrightarrow G(i)$ は weak equivalence とする。$F(i)$, $G(i)$ が fibrant とすると、このとき、t から誘導される射*

$$\mathrm{holim}F \longrightarrow \mathrm{holim}G$$

はそれぞれ weak equivalence である。また、$F(i)$, $G(i)$ が cofibrant とすると、

$$\mathrm{hocolim}F \longrightarrow \mathrm{hocolim}G$$

が weak equivalence である。

より一般的には以下の定義の仕方がある。

Definition 1.7. $F : I \longrightarrow M$ を単体的モデル圏 M への関手とする。$K : I \longrightarrow \mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ に対し、次のイコライザー図式を考える。

$$\mathrm{hom}_I(K,F) \longrightarrow \prod_{i \in I_0} (F_i)^{K_i} \rightrightarrows \prod_{i \longrightarrow j} (F_j)^{K_i}$$

また、$L : I^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ に対し、次のコイコライザー図式を考える。

$$\coprod_{i \to j} F_i \otimes K_j \rightrightarrows \coprod_{i \in I_0} F_i \otimes K_i \longrightarrow F \otimes_I L$$

明らかに、$\mathrm{holim}F = \mathrm{hom}_I(N(I \downarrow -), F)$ であり、$\mathrm{hocolim}F = F \otimes_I N(- \downarrow I)^{\mathrm{op}}$ である。特に $I = \Delta$ や、Δ^{op} の場合は (co)simplicial diagram の集計 (totalization)、実現 (realization) の概念となる。このとき、$\mathrm{Tot}(F) = \mathrm{hom}_\Delta(\Delta, F)$, $|F| = F \otimes_{\Delta^{op}} \Delta$ と書いて F の実現、集計とそれぞれ呼ぶ。

Remark 1.8. $X : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Top}$ に対し、$|X|$ は通用の意味での実現、$Y : \Delta \longrightarrow \mathbf{Top}$ に対し、$\mathrm{Tot}Y$ は通常に意味での集約になる。ただし、$\mathbf{Top}$ の simplicial enrich 構造は、$S_* : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ から自然に定まるものとする。

さて、$M = \mathrm{Grd}$ における cosimplicial diagram $I = \Delta$ の場合におけるホモトピー（余）極限とはいったい何なのかを考えてみる。

Remark 1.9. $X^* : \Delta \longrightarrow \mathrm{Grd}$ において、$\pi_1(N(\Delta\downarrow[n]))$ と $\pi_1(\Delta^n)$ を比較する。$\Delta\downarrow[n]$ と Δ^n がそれぞれ可縮なので、対象の対応を考えればよい。まず、$\pi_1(N\Delta\downarrow[n]) = \pi(\Delta\downarrow[n])$ であり、$\pi_1(\Delta^n) = \pi_1(N([n])) = \pi([n])$ であることに注意する。ただし、πC は C の亜群化である。

$$\mathrm{ev}_n : \pi(\Delta\downarrow[n]) \longrightarrow \pi([n])$$

を、$\varphi : [m] \to [n] \in \Delta\downarrow[n]$ に対し、$\mathrm{ev}_n(\varphi) = \varphi(0) \in [n]$ を対応させる関手とする。逆に、

$$i_n : \pi([n]) \longrightarrow \pi(\Delta\downarrow[n])$$

を、$i_n(m) = [0] \xrightarrow{m} [n]$ により定義する。ev_n, i_n により、$\pi(\Delta\downarrow[n])$ と $\pi([n])$ は同値である。そして、$\pi(\Delta\downarrow[*]), \pi([*])$ を cosimplicial groupoid としてとらえると、ev_n, i_n はその face と degeneracy map と可換なので、ev_*, i_* は cosimplicial groupoid の map で対象ごとに圏同値、Anderson モデル構造における weak equivalence である。よってホモトピー極限の性質から、

$$\mathrm{holim}X^* = \mathrm{hom}_\Delta(N(\Delta\downarrow)-, X^*) \cong \mathrm{hom}_\Delta(\Delta, X^*) = \mathrm{Tot}X^*$$

である。ただし、$\pi_1(\Delta^n) = \pi_1(\mathrm{sk}_2\Delta^n)$ であるため、

$$\mathrm{holim}X^* = \mathrm{Tot}_2X^*$$

よって、groupoid の構造を具体的に記述すると、

$$(\mathrm{holim}X^*)_0 = \{(x,\alpha) \mid x \in X^0_0, \alpha \in X^1(d^1(x), d^0(x)), s^0(\alpha) = 1_x, d^0(\alpha)\circ d^2(\alpha) = d^1(\alpha)\}$$

が対象であり、射は

$$(\mathrm{holim}X^*)((x,\alpha),(y,\beta)) = \{f \in X^0(x,y) \mid \beta\circ d_1(f) = \alpha\circ d_0(f)\}$$

となる。同様にして、$F : \Delta^{op} \longrightarrow \mathrm{Grd}$ ならば、$\mathrm{hocolim}F \cong |F|_2$ である。

さて、ようやく stack の話に戻ろう。Stack は特別な prestack であるが、ホモトピー論的には prestack も本当の反変関手も大差ない。Hollander は反変関手を用いて stack を特徴づけようとした。それは、$\mathrm{Funct}(C^{\mathrm{op}}, \mathrm{Grd})$ におけるモデル構造とホモトピー極限を用いるためである。Prestack と反変関手の関係をもう少し深く考察してみよう。まずは prestack を反変関手に変形することを考える。

Definition 1.10. $p : E \longrightarrow B$ を fibered category とする。このとき、関手 $\Gamma_p : C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Grd}$ を以下のように定義する。$x \in C^{\mathrm{op}}_0$ に対し、$q : C\downarrow x \longrightarrow C$ を canonical projection とする。

$$\Gamma_p(x) = \{s : C\downarrow x \longrightarrow E \mid p\circ s = q\}$$

これは groupoid である。なぜなら、$t : s \Longrightarrow s'$ を自然変換とすると、$t_y : s(y) \longrightarrow s(y') \in p^{-1}(y)$ となり、$p^{-1}(y)$ が groupoid なのだから、t も自然同型となるためである。もちろん、$f : x \longrightarrow y$ に対しては、$f_* : C\downarrow x \longrightarrow C\downarrow y$ が誘導され、これを合成することで、$\Gamma_p(f) : \Gamma_p(y) \longrightarrow \Gamma_p(x)$ が得られる。

Proposition 1.11. 次は随伴対である。

$$\mathrm{Gr} : \mathrm{Grd}^{C^{\mathrm{op}}} \Longleftrightarrow \mathcal{F}_C : \Gamma$$

Proof. $F \in \mathrm{Grd}^{C^{\mathrm{op}}}$ と $q : E \longrightarrow C \in \mathcal{F}_C$ をそれぞれとる。

$$\alpha : \mathrm{Grd}^{C^{\mathrm{op}}}(F, \Gamma_q) \longrightarrow \mathcal{F}_C(\mathrm{Gr}F, q)$$

は以下のように定義する。自然変換 $t : F \Longrightarrow \Gamma_p$ に対し、C 上の関手 $\alpha(t) : \mathrm{Gr}F \longrightarrow E$ を、対象に対して $\alpha(t)(x,a) = t_x(a)(1_x)$ により定義する。射に対しては、$(f,u) : (x,a) \longrightarrow (y,b)$ に対し、

$$\alpha(t)(f,u) : t_x(a)(1_x) \xrightarrow{t_x(u)_{1_x}} t_x(Ff(b))(1_x) = \Gamma_q f(t_y(b))(1_x) = t_y(b)(1_y)$$

により対応させる。逆に、

$$\beta : \mathcal{F}_C(\mathrm{Gr}F, q) \longrightarrow \mathrm{Grd}^{C^{\mathrm{op}}}(F, \Gamma_q)$$

は、$f : \mathrm{Gr}F \longrightarrow E$ を C 上の関手とすると、$\beta(f) : F \Longrightarrow \Gamma_q$ は以下のように与えられる。$\beta(f)_x : F_x \longrightarrow \Gamma_q(x)$ であり、$\beta(f)_x(a) : C \downarrow x \longrightarrow E$ が、

$$\beta(f)_x(a)(\varphi : y \longrightarrow x) = f(y, F\varphi(a))$$

により与えられる。射に関しては、$\beta(f)_x(g : a \longrightarrow b) = f(1_y, F\varphi(g))$ で与えられる。α, β が互いに逆写像になっていることが確かめられる。 □

Definition 1.12. $p : E \longrightarrow B$ は fibered category に対し、弱自然変換

$$t : \Gamma_p \Longrightarrow p^*$$

$t_b : \Gamma_p(b) \longrightarrow p^{-1}(b)$ が、対象に対し $t_b(s) = s(1_b)$ で定義し、$\alpha : s \Longrightarrow s'$ に対し、$t_b(\alpha) = \alpha_{1_b}$ により定義する。

Proposition 1.13. 任意の $b \in B_0$ に対し、$t_b : \Gamma_p(b) \longrightarrow p^{-1}(b)$ は圏同値である。

Proof. 逆対応 $u : p^{-1}(b) \longrightarrow \Gamma_p(b)$ は以下で定義される。$u(e) : (B \downarrow b) \longrightarrow E$ は、$f : a \longrightarrow b$ に対し、$u(e)(f) = \tilde{a}_e$ と e を終点とした f の持ち上げの始点とする。また、射に対しても、$u(e)(\varphi) = \tilde{\varphi}$ として持ち上げで定義される。さらに、$\alpha : e \longrightarrow e'$ に対し、$u(\alpha) : u(e) \Longrightarrow u(e')$ も、$f : a \longrightarrow b$ に対し、$f \circ u(\alpha)(f) = \alpha \circ f$ を満たす $p^{-1}(a)$ の射が対応する。u と t_b によって圏同値が与えられる。 □

Definition 1.14. Prestack $F : C \longrightarrow \mathrm{Grd}$ に対し、$p_F : \mathrm{Gr}(F) \longrightarrow C$ は fibered category だったので、$\Gamma_{p_F} : C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Grd}$ が考えられ、F の rigidification と呼び、$\mathrm{Rig}(F)$ と書く。Proposition 1.13 により、$\mathrm{Rig}(F)(c) \cong F(c)$ である。

Definition 1.15. (C, J) を景とし、$\{U_i \longrightarrow X\}$ を $X \in C_0$ 上の被覆とする。このとき、

$$U_* : \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$$

を、

$$U_n = \coprod U_{i_0} \times_X U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_n}$$

により定義する。ただしこのとき、$U_{i_0} \times_X U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_n}$ は C の対象ではなく、米田埋め込み $C \longrightarrow \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ による像としてとらえている。そうしないと直和が取れないからである。Face と degeneracy map は、projecion と diagonal により導かれる。この $\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ における simplicial object を $\{U_i \longrightarrow X\}$ の nerve と呼ぶ。関手 $F : C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Grd}$ に対し、$F(U_*)$ は cosimplicial groupoid で、$F(U_n) = \prod F(U_{i_0} \times_X U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_n})$ により定義する。

Theorem 1.16. (C, J) を景とする。*Prestack* $F : C \longrightarrow \mathrm{Grd}$ が *stack* であることと、任意の被覆 $\{U_i \longrightarrow X\}$ に対し、

$$\mathrm{Rig}(F)(X) \longrightarrow \mathrm{holim}\mathrm{Rig}(F)(U_*)$$

が圏同値になることは同値である。